



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA  
SEDE MEDELLÍN

Maestría en Enseanza de las Ciencias Exactas y Naturales

PROPUESTA METODOLÓGICA PARA MEJORAR EL  
DESEMPEÑO DE LOS ESTUDIANTES DE MATEMÁTICAS  
BÁSICAS DE LA FACULTAD DE MINAS DE LA  
UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

TESIS DE MAESTRÍA

**Olga Lucía Valencia Ospina**

**2014**



PROPUESTA METODOLÓGICA PARA MEJORAR EL  
DESEMPEÑO DE LOS ESTUDIANTES DE  
MATEMÁTICAS  
BÁSICAS DE LA FACULTAD DE MINAS DE LA  
UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

TRABAJO DE GRADO PRESENTADO POR:  
**Olga Lucía Valencia Ospina**

COMO REQUISITO PARCIAL PARA OPTAR AL TÍTULO DE:  
**Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y  
Naturales**

DIRECTORA:  
**Lina María Gómez, Ph.D.**

**Universidad Nacional de Colombia  
Sede Medellín  
Facultad de Ciencias  
Junio de 2014**



*A mis hijos Laura María y Álvaro, que inundan de alegría mis  
días.*

*A mi esposo, compañero y amigo Freddy, que con su  
comprensión le da confianza a mi vida.*

*A mi mamá Asceneth, esa luchadora de la vida que me enseñó y  
sigue enseñando a no desistir...*



## AGRADECIMIENTOS

Lograr una meta personal nunca es un esfuerzo individual. Por eso, al finalizar este trabajo quiero expresar mi más profundo agradecimiento a la profesora Lina Gómez, quien me ha impulsado para no desistir, y con todo su conocimiento, apoyo y paciencia ha hecho de este sueño una realidad.

Muchas gracias también a mis siete hermanos y a mis dos hermosos hijos, por su acompañamiento. También quiero agradecer especialmente a mi esposo, por creer y ver en mí cualidades que ni yo misma conocía.





# Índice general

Índice de Figuras	III
Índice de Tablas	V
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Sobre la Deserción Estudiantil y las Pedagogías Activas</b>	<b>5</b>
2.1. El problema de la Deserción Estudiantil . . . . .	6
2.2. Deserción en la Educación Superior en Colombia . . . . .	10
2.3. Pedagogías activas orientadas a programas académicos de pregrado	13
2.3.1. Aprendizaje colaborativo . . . . .	14
2.3.2. Estudios de caso . . . . .	16
2.3.3. Aprendizaje por pares . . . . .	17
2.3.4. Aprendizaje basado en consultas . . . . .	19
2.3.5. Aprendizaje basado en problemas . . . . .	20
2.3.6. Aprendizaje basado en proyectos . . . . .	23
2.4. Propuestas específicas en el área de matemáticas . . . . .	24
2.5. Conclusiones . . . . .	31
<b>3. Desarrollo de los temas del curso de matemáticas: Una propuesta de problema</b>	<b>33</b>
3.1. Listado de temas del curso de Matemáticas Básicas . . . . .	34
3.1.1. Ángulos, triángulos, congruencia y semejanza . . . . .	34
3.1.2. Áreas y Perímetros. Conjuntos . . . . .	35
3.1.3. Sistemas Numéricos, Exponentes y Radicales . . . . .	35
3.1.4. Álgebra básica . . . . .	36
3.1.5. Productos notables, Factoriales y Teorema del Binomio	36
3.1.6. Expresiones racionales . . . . .	37

3.1.7.	Inecuaciones . . . . .	37
3.1.8.	Modelado mediante ecuaciones . . . . .	38
3.1.9.	Funciones especiales y transformación de funciones . . .	38
3.1.10.	Funciones pares e impares y operaciones entre funciones	39
3.1.11.	Funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas. Función inversa . . . . .	39
3.1.12.	Funciones exponencial y logarítmica . . . . .	40
3.1.13.	Ángulos y Trigonometría . . . . .	40
3.2.	Problema propuesto: Localización de fuentes de señal . . . . .	41
3.2.1.	Aplicación de la localización de fuentes en un contexto real . . . . .	42
3.2.2.	Localización de fuentes electromagnéticas de radiofre- cuencia . . . . .	44
3.3.	Conclusiones . . . . .	53
<b>4.</b>	<b>Propuesta de Aprendizaje Basado en Problemas (ABP)</b>	<b>55</b>
4.1.	Actividad preliminar: Conformación de los equipos de trabajo	56
4.2.	Problema: Localización de fuentes por medio de Ángulos . . .	58
4.2.1.	Actividad de campo: Localización en el plano cartesiano	59
4.2.2.	Actividad: Triángulos semejantes, áreas y perímetros .	66
4.2.3.	Actividad: Funciones trigonométricas . . . . .	71
4.3.	Propuesta de otra actividad de campo: Localización TOA . . .	73
4.4.	Conclusiones . . . . .	76
<b>5.</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>77</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>81</b>

# Índice de figuras

2.1. Modelo para estudiar la deserción estudiantil en la educación superior [Tinto, 1975] . . . . .	9
2.2. Esquema de la Estrategia Integral Propuesta por la Universidad Nacional de Colombia . . . . .	11
2.3. Porcentaje de deserciones de acuerdo al semestre cursado . . .	12
2.4. Comunidad de Aprendizaje [Garrison et al., 2010] . . . . .	15
2.5. Problema de áreas para el desarrollo de series geométricas . .	26
2.6. Área acumulada en función del orden del cuadrado sombreado, para el problema de la Figura 2.5 . . . . .	28
3.1. Esquema general de un sistema de localización . . . . .	45
3.2. Localización a partir del ángulo. . . . .	48
3.3. Localización por medio de la técnica TOA. . . . .	49
3.4. Hipérbola generada por la diferencia de tiempos entre dos estaciones. . . . .	52
3.5. Solución gráfica de un sistema TDOA. . . . .	54
4.1. Formato para la conformación de los grupos . . . . .	59
4.2. Didáctica de campo para el problema de localización de fuentes	62
4.3. Estimación del ángulo para cada estación . . . . .	63
4.4. Triángulo formado por las tres estaciones sensoras . . . . .	68
4.5. Cambio de la distancia entre una estación y el evento, para $\alpha > 1$	69
4.6. Traslación del origen de coordenadas . . . . .	72
4.7. Una posible distribución de estaciones y evento para la didáctica TOA . . . . .	74



# Índice de tablas

2.1. <i>Suma finita de áreas para el problema de la Figura 2.5 . . . .</i>	27
3.1. <i>Listado de bloques de tema, para el curso de matemáticas básicas</i>	34
4.1. <i>Propuesta de Programa Calendario asociado a la actividad de campo . . . . .</i>	65
4.2. <i>Conceptos teóricos involucrados en la didáctica propuesta . . .</i>	75



# Capítulo 1

## Introducción

El problema de la deserción en la educación es bastante grave y muy común en diversas partes del mundo. Existe una variedad de causas asociadas al problema, desde las meramente académicas, hasta aquellas que implican factores socio—económicos y psicológicos.

Siendo la educación un factor determinante en el desarrollo de una sociedad, la deserción estudiantil se constituye en un problema clave, que debe ser abordado desde todos sus matices y en lo posible, tratado de forma integral para lograr una solución efectiva. Sin embargo, este tratamiento integral muchas veces no es posible, dada la naturaleza compleja del problema, por lo que se atacan solamente y de manera individual algunos de los factores clave asociados a la deserción.

En el caso concreto de la educación superior colombiana, la deserción implica una serie de consecuencias gravísimas, que van desde el desperdicio de recursos valiosos, hasta las implicaciones sociales asociadas a un estudiante que abandona sus estudios y que difícilmente podrá retomarlos en el futuro. Muchas de las propuestas formuladas desde las universidades para mitigar este problema están orientadas a hacer un acompañamiento de los estudiantes en riesgo, de modo que se les brinde asesoría psicológica o apoyo económico.

De manera complementaria, muchas instituciones de educación superior (IES) se han ocupado de revisar y actualizar sus metodologías de enseñanza, buscando facilitar la adquisición de los saberes a los estudiantes en riesgo de deserción y al resto de estudiantes en general. Lo anterior se debe a la per-

cepción generalizada de que muchos casos de deserción son consecuencia de la imposibilidad de los estudiantes de asimilar correctamente los conocimientos que les son impartidos en las IES. Se busca entonces facilitar los procesos de Enseñanza–Aprendizaje por medio de metodologías novedosas y motivadoras para los estudiantes, de modo que se les disuada de abandonar sus proceso educativo.

Dentro de todo el universo de saberes que se ofrece a los estudiantes en su formación, en general las matemáticas son las que presentan más dificultades. Esto se puede deber a que otras áreas del conocimiento trabajan sobre objetos de aprendizaje concreto, mientras que en matemáticas es necesario desarrollar niveles de abstracción más complejos. En cualquier programa académico de ingeniería, el estudiante debe abordar el estudio de matemáticas al inicio de su carrera, lo que es coincidente con los índices de deserción más altos para estos programas.

Por todo lo anterior, parece lógico entonces abordar el estudio de las metodologías de enseñanza en programas de pregrado para el área de matemáticas. El presente trabajo tiene como objetivo presentar una propuesta metodológica para mejorar el desempeño de los estudiantes de la asignatura *Matemáticas Básicas* en la Facultad de Minas de la Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín. Debido al alcance del proyecto, la implementación y validación de la propuesta son consideradas como trabajo futuro en el presente documento, aunque si se llega a cierto nivel de detalle con respecto a la implementación de las actividades y evaluación de las mismas dentro de la metodología.

El resto de este documento está organizado de la siguiente manera:

- El Capítulo 2 inicia con un estudio de la deserción estudiantil, explorando causas y modelos reportados en la literatura. A continuación, se presenta una revisión del problema de la deserción estudiantil en Colombia, concretando el problema a los programas de formación de pregrado. Seguidamente, el capítulo muestra una taxonomía de las pedagogías activas, que han sido propuestas como una forma significativa y motivadora para los estudiantes de aprender. De todas estas propuestas de pedagogía activa, se destaca el aprendizaje basado en problemas (ABP), que hace énfasis en la solución de un problema y en los conocimientos y saberes que son necesarios para dicha solución. Finalmente, el capítulo mues-



---

tra una revisión de algunas propuestas reportadas en la literatura sobre pedagogías activas, para el área de matemáticas.

- En el capítulo 3 se hace un inventario de los temas que se abordan en la asignatura *Matemáticas Básicas*, impartida a estudiantes de primer semestre de ingeniería en la Facultad de Minas de la Universidad Nacional de Colombia. En consistencia con lo dicho en el Capítulo 2, este inventario servirá en la metodología ABP para establecer qué problemas pueden ser útiles en el proceso de aprendizaje de algunos de estos conceptos. La segunda sección del capítulo aborda la descripción de un problema basado en localización de fuentes de señal, que servirá como ejemplo para la propuesta metodológica basada en ABP. Dicho problema tienen varios matices y diversas formas de solución que pueden servir para abordar varios de los conceptos básicos listados en el contenido de la asignatura.
- El Capítulo 4 muestra una lista de actividades propuestas para el desarrollo de la metodología ABP, alrededor del problema de localización de fuentes de señal, descrito en el capítulo anterior. Dichas actividades se dividen en dos tipos. En primer lugar está una actividad de campo, que permite a los estudiantes asociar el problema abstracto con una situación y objetos concretos. Luego de la actividad de campo aparecen propuestas una serie de actividades complementarias. En todos los casos, las actividades se describen a partir de unos objetivos de formación, incluyendo los conceptos que se pretende abordar y se muestran detalles sobre las tareas que se deben desarrollar, como por ejemplo informes y exposiciones.
- Finalmente, el Capítulo 5 muestra las conclusiones y el trabajo futuro propuesto.



## Capítulo 2

# Sobre la Deserción Estudiantil y las Pedagogías Activas

La deserción estudiantil es uno de los problemas más graves a los que se enfrentan los sistemas educativos en todo el mundo, si bien dicha deserción puede ocurrir por diversos motivos, dependiendo de las condiciones económicas y sociales de los estudiantes. En el caso de la educación superior, la deserción tiene un alto impacto social, psicológico y económico, que es consecuencia por un lado, de lo costoso que resultan los gastos asociados al desarrollo de los estudios, y por otro, de la frustración y pérdidas de oportunidades que son consecuencia de la no culminación de los programas académicos [Pinto et al., 2007].

Se han adelantado diversos estudios para abordar el problema de la deserción. En primer lugar, se pretende modelar el fenómeno para poder identificar sus causas y factores de riesgo. En otros enfoques se abordan asuntos como el del acompañamiento de los estudiantes con asesorías psicológicas, o de índole pedagógica. También se ataca el problema desde el punto de vista de la situación socioeconómica de los estudiantes en riesgo de sufrir fenómenos de deserción.

De entre todas estas propuestas de solución, se destacan aquellas que tienen que ver con el desarrollo curricular de los contenidos, las pedagogías y metodologías de enseñanza. En este caso, se busca que los estudiantes se apropien de herramientas de estudio y aprendizaje que les permitan abordar el conocimiento de manera autónoma, lo que es al mismo tiempo un factor motivante y que reduce las probabilidades de deserción del estudiante por bajo rendimiento académico.

Este capítulo aborda el problema de la deserción estudiantil de los programas de pregrado para la educación superior. En primer lugar se revisan algunos de los modelos y conceptos sobre deserción más relevantes reportados en la literatura. Luego se hace una caracterización del problema aquí en Colombia, incluyendo algunas estadísticas y una clasificación de las propuestas orientadas a reducir el impacto de la deserción en las universidades. De manera particular, se muestra cómo una de las estrategias propuestas por la Universidad Nacional de Colombia, está enfocada al rediseño de los currículos y al uso pedagogías novedosas y efectivas para el aprendizaje del estudiante. En este sentido, el capítulo hace una revisión de los enfoques disponibles en la literatura con respecto a las Pedagogías Activas. Finalmente, se muestran algunas propuestas reportadas específicamente en el área de matemáticas.

## 2.1. El problema de la Deserción Estudiantil

A pesar de los esfuerzos por mejorar la cobertura de la educación superior en Colombia, y de resultados como el aumento de dicha cobertura en diez puntos porcentuales (de 24,1% a 34,4%) entre los años 2002 y 2008 [Guzmán et al., 2009], uno de los principales problemas latente en el sistema de educación superior es la deserción. Según estadísticas del Ministerio de Educación Nacional, de cada cien estudiantes que inician un programa académico de pregrado, cerca de la mitad no logra concluir su ciclo de formación y obtener el grado.

La cantidad de tiempo de inactividad académica a partir de la cual un estudiante es considerado desertor de un programa, varía dependiendo de la institución. El Instituto Colombiano para el Fomento de la Educación Superior (ICFES) clasifica como desertores a aquellos estudiantes que habiendo ingresado a un programa de estudios de pregrado, no se encuentran matriculados en un momento dado. El Ministerio de Educación Nacional, clasifica como desertores a aquellos estudiantes que presenten dos (2) o más semestres de inactividad académica. Por último, la Universidad Nacional de Colombia, considera desertores a aquellos estudiantes que no se hayan matriculado durante cinco (5) o más semestres consecutivos.

En cualquier caso, el tema de la deserción estudiantil en los programas de pregrado ha adquirido una gran relevancia por tres razones: En primer lugar, porque la deserción entorpece los esfuerzos que hacen instituciones como la Universidad Nacional de Colombia para mejorar la cobertura. En segundo lugar, por las pérdidas sociales y financieras que implica que muchos de los estudiantes de pregrado no finalicen sus carreras. Finalmente, por el escaso conocimiento que se tiene en el país sobre los ciclos de deserción y las estrategias más adecuadas para disminuirla [Guzmán et al., 2009].

Si bien las causas no son necesariamente las mismas, a nivel internacional el problema de la deserción ha sido abordado en diversos estudios y proyectos. Una primera aproximación al problema fue tratar la deserción estudiantil usando la analogía del suicidio en la sociedad, para lo cual se acudía a la teoría de Durkheim [Galtieri and Peón, 1994]. De acuerdo con este enfoque, los centros de educación superior se consideran un sistema con su propia estructura social y valores, y es razonable esperar que bajos niveles de integración social aumenten la probabilidad de desertar [Spady, 1970]. Sin embargo, estas investigaciones no tuvieron mayor trascendencia, porque se enfocaron exclusivamente en los aspectos individuales del problema de la deserción, a saber, las carencias en la integración social del estudiante.

Hoy en día se acepta de manera amplia que la deserción puede y debe ser explicada por diferentes factores, entre los que se incluyen los del tipo socio-económico, individual, institucional y académico. El problema latente en el estudio de la deserción estudiantil radica en encontrar la mejor forma de integrar todos estos factores de manera adecuada. Algunos autores evidencian que existen diferentes tipos de abandono escolar, por lo que es muy difícil que una única definición o diagnóstico de la deserción sea efectiva en todos los casos de relevancia [Tinto, 1988].

Queda claro entonces que el enfoque con el que se aborde el problema de la deserción estudiantil dependerá en gran medida de quien asuma el problema, es decir, de la entidad que estudia el problema y de sus objetivos. Por ejemplo, desde el punto de vista de una Institución de Educación Superior (IES), que un estudiante abandone sus estudios, es evidenciado inmediatamente como un caso de deserción, lo que acarrea implicaciones administrativas y financieras. Sin embargo, desde el punto de vista del sistema de educación superior, un estudiante que abandona una IES particular puede estar simplemente en

tránsito hacia otra, por lo que el evento de deserción solo se configura si dicho estudiante abandona de manera definitiva el sistema. Desde este último punto de vista, la deserción solo aparece en aquellos casos en los que el estudiante inicia su proyecto educativo, pero no es capaz de concluirlo [Giovagnoli, 2002].

La Figura 2.1 muestra una de las propuestas más simples para el modelado de la deserción en la educación superior [Tinto, 1975]. En ella se ve cómo el estudiante inicia su ciclo de formación en la educación superior con un acervo de características, tales como la cualificación adquirida de su formación media, los atributos y habilidades individuales y los atributos familiares. La IES cuenta con unos objetivos institucionales, que deben conciliarse con los objetivos personales del estudiante. Así mismo, la IES a menudo brinda diversas formas de apoyo (financiero, de bienestar) e implementa métodos de enseñanza orientados a que el proyecto educativo del estudiante sea exitoso. Todos estos elementos se combinan en procesos de integración social y académica dentro de la IES. Dichos procesos se realimentan a su vez del discurrir del estudiante durante la permanencia en la institución, de modo que siendo exitosos, garantizan la permanencia del mismo en el proyecto académico.

Otra forma de estudiar el problema de la deserción estudiantil es a través de los factores que determinan que dicho evento ocurra en las IES. Dichos factores se pueden clasificar en cuatro grandes grupos:

1. *Factores Individuales*: Se refiere a atributos propios del estudiante, como el género, la raza, la posición dentro del grupo familiar, calamidades, integración social, actividades no académicas, salud, etc[Bean, 1980].
2. *Factores Académicos*: Se refiere a las capacidades y competencias del estudiante, tales como la orientación profesional, la formación media o secundaria, el rendimiento académico, la calidad del programa de pregrado al que se ingresa, los métodos y los hábitos de estudio, la insatisfacción con el programa que se cursa, la duración de dicho programa, y otros [Cabrera et al., 1993].
3. *Factores Institucionales*: Implica elementos propios de la IES que afectan el desempeño y la integración del estudiante a la IES, tales como la normatividad académica, becas, formas de apoyo financiero y psicológico para el estudiante, recursos universitarios de bienestar, factores de orden público, entorno político, etc[Porto and Gresia, 2004].

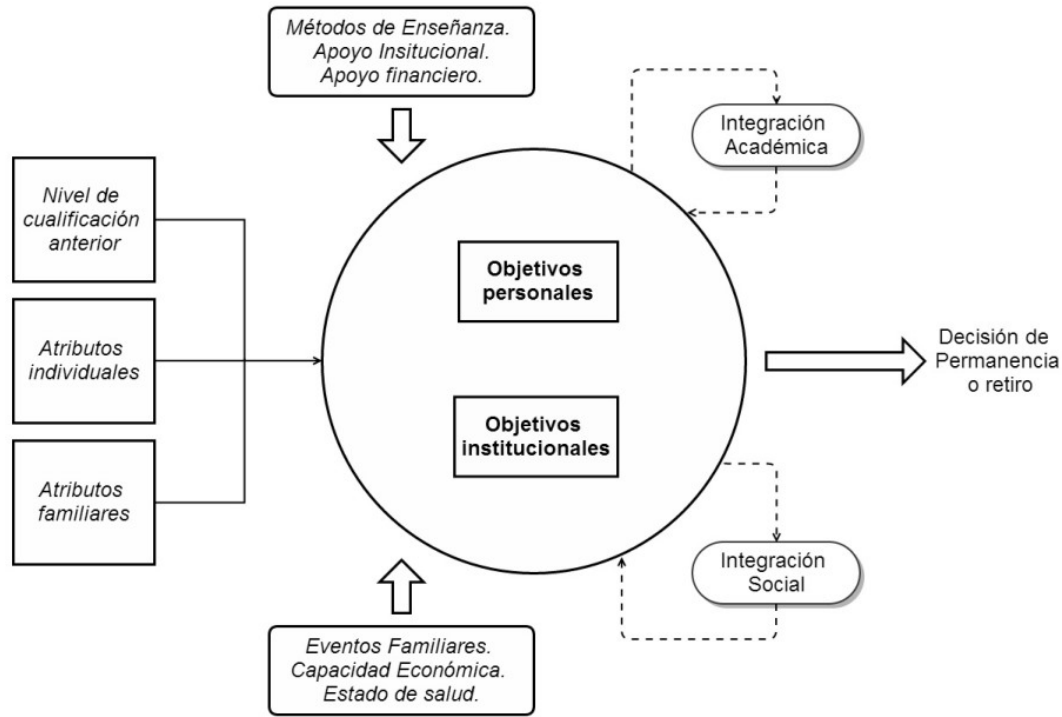


Figura 2.1: *Modelo para estudiar la deserción estudiantil en la educación superior [Tinto, 1975]*

4. *Factores Socioeconómicos:* En este caso, se trata de factores tales como el estrato socioeconómico del que proviene el estudiante, la situación laboral propia y la del entorno familiar, personas a cargo, nivel educativo de los padres, etc[Porto and Gresia, 2004].

Muchos autores se han limitado al estudio de la taxonomía recién descrita de manera estática, es decir, sin considerar el efecto del tiempo en los factores que afectan la deserción, además de no considerar la interacción entre las categorías y los factores individuales [Guzmán et al., 2009]. Como Excepción a esta tendencia, se destaca el trabajo desarrollado por DesJardines, Alhburg y McCall [DesJardines et al., 1999]. Dicho trabajo propone que la mayoría de la literatura disponible con respecto al problema de la deserción en educación superior, se centra en el porqué del proceso de abandono, pero no permite entender el proceso en sí mismo. Se propone entonces un análisis de supervivencia, de duración o de moderación de riesgo, que consiste en el estudio de

la historia de eventos del proceso de deserción de modo que se cuenta con una descripción longitudinal del mismo. Entre los resultados aportados por dicho trabajo, se concluye que la probabilidad de un evento de deserción no es constante a lo largo de la permanencia del estudiante en el programa de estudios, y se propone un modelo de deserción dinámico, en contraste con el enfoque estático descrito en la Figura 2.1.

## 2.2. Deserción en la Educación Superior en Colombia

Hasta hace muy poco tiempo en Colombia no se contaba con la información concerniente a los procesos de deserción en las IES, de modo que tampoco había políticas claras orientadas a mejorar los índices de permanencia de los estudiantes. Hasta el año 2003, los estudios disponibles sobre la deserción en Colombia son esporádicos y fragmentados, relativos a unos cuantos programas académicos y efectuados frecuentemente cuando el estudiante ya había desertado. Se destaca también en esta época, la carencia de un marco conceptual bien fundamentado en el tema, que permitiera convenir por ejemplo, la definición de un evento de deserción, o la identificación de los factores asociados a estos eventos.

Solo a partir del año 2003 se adelantan análisis formales sobre el tema del abandono académico en las IES, fundamentados en estudios del estado del arte en este tema, e identificando los cuatro grupos de factores enumerados anteriormente. Para esta época se crea el sistema SPADIES (*Sistema para la prevención y análisis de la deserción*) por parte del Ministerio de Educación Nacional, lo que permite a las instituciones tener acceso a las estadísticas de todo el sistema, y excluir de los indicadores de deserción los casos de transferencia entre instituciones. El sistema se basa en *modelos de duración*, que es una herramienta estadística que permite determinar el riesgo de deserción de un estudiante a partir de sus factores de riesgo y del tiempo que lleva en la institución. La adopción de este modelo dinámico de deserción permitió identificar aquellas variables que determinan de manera importante el fenómeno de la deserción en Colombia. Además, el modelo dinámico fue útil para identificar cuáles de dichas variables pueden ser afectadas por las IES, como una



estrategia para mejorar los indicadores de permanencia.

En este sentido, la Universidad Nacional de Colombia ha definido seis (6) líneas estratégicas para reducir el problema de la deserción de los estudiantes de pregrado [Pinto et al., 2007]. Dichas líneas son consistentes por lo definido en el sistema SPADIES, y aparecen bosquejadas en la Figura 2.2.



Figura 2.2: *Esquema de la Estrategia Integral Propuesta por la Universidad Nacional de Colombia*

Particularmente, la Figura 2.2 muestra cómo la Universidad Nacional de Colombia ha identificado las cuestiones asociadas al currículo de los programas y las prácticas pedagógicas (línea 6), como elementos estratégicos asociadas con el problema de la deserción estudiantil en pregrado. Tal y como lo muestra la Figura 2.2, las acciones a adelantar en esta línea tienen que ver con el rediseño de los programas curriculares y con la adopción de estrategias pedagógicas novedosas, que motiven al estudiante e incrementen sus probabilidades de culminar exitosamente sus estudios. Esta afirmación tiene que ver con que la deserción es probablemente más una consecuencia de la falta de efectividad de las IES para enseñar, que de la falta de capacidades por parte del estudiante [Bruner and Díaz, 2000].

Claramente aparece la cuestión con respecto a en qué momento de la carrera pueden ser más significativos los esfuerzos relativos al currículo y a las pedagogías, en el sentido de disminuir las tasas de deserción. La Figura 2.3 muestra estadísticas de deserción obtenidas del sistema SPADIES

[Guzmán et al., 2009]. Dicha figura expone cómo el 53 % de las deserciones de pregrado ocurren durante los primeros dos semestres del programa académico, y el 64 % lo hace en los tres primeros semestres.

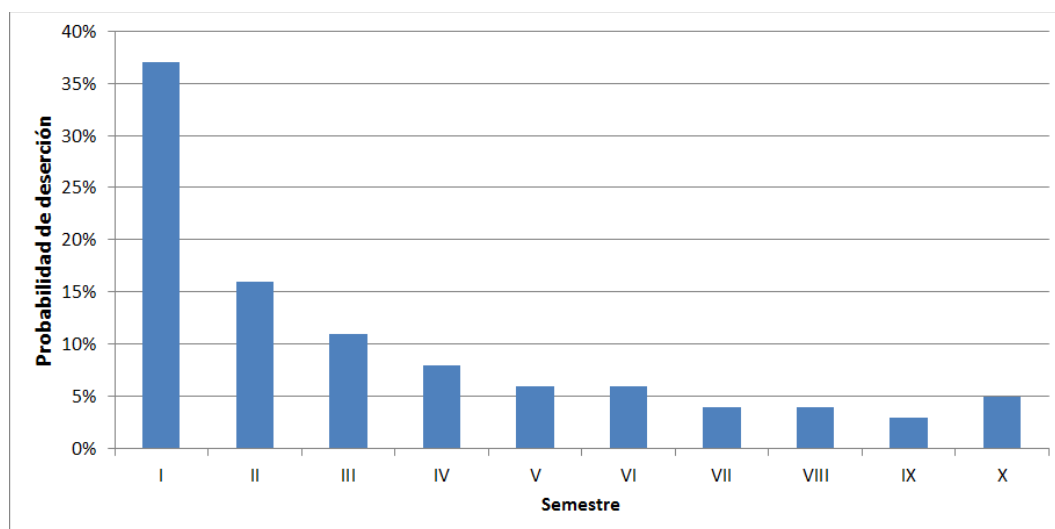


Figura 2.3: *Porcentaje de deserciones de acuerdo al semestre cursado*

Las Figuras 2.2 y 2.3 sugieren que una estrategia que aborde el problema de las prácticas pedagógicas y que afecte el discurrir del estudiante durante los primeros semestres del programa académico, tiene el potencial de afectar de manera importante los indicadores de deserción. Adicionalmente, del estudio sobre deserción desarrollado por la Universidad Nacional de Colombia, se concluye que el área de matemáticas es la que exhibe mayores dificultades para los estudiantes y con la que se asocia buena parte de la deserción académica en los primeros semestres [Pinto et al., 2007]. Algunos trabajos sugieren que los métodos de enseñanza usados en el área de matemáticas configuran situaciones que favorecen la deserción, e incluso tienen implicaciones de exclusión social [Delgado and Tenorio, 2009]. Paradójicamente, en el área de matemáticas existen muchos trabajos reportados en la literatura, tendientes a mejorar la efectividad de los métodos pedagógicos [Adedayo, 1999, Smith and Geller, 2004, Parker, 2005].

## 2.3. Pedagogías activas orientadas a programas académicos de pregrado

En la sección 2.2 se concluyó que una estrategia orientada al mejoramiento de los métodos pedagógicos impartidos a los estudiantes durante los primeros semestres de su carrera, tiene el potencial de disminuir de manera importante las tasas de deserción. Se dijo además que una de las áreas que exhibe más dificultades a los estudiantes y que puede ser determinante en muchos de los casos de deserción, es el área de matemáticas. Esta sección describe algunos de los métodos y trabajos reportados en la literatura, que hacen parte del conjunto conocido como *Pedagogías Activas*.

El conjunto de pedagogías activas ha sido propuesto como una estrategia orientada a mejorar la efectividad del proceso de aprendizaje, brindando una alternativa a las metodologías pedagógicas tradicionales. La masificación de la cobertura, mencionada en la sección 2.2, impide el ejercicio de prácticas de aprendizaje personalizadas, lo que impone el reto de concebir nuevas formas de enseñar en las que el protagonista del proceso sea el estudiante y no el profesor. Las metodologías activas imponen nuevos retos al profesor, que pasa de ser el poseedor absoluto del saber, a un simple facilitador o diseñador de situaciones, en las cuales el estudiante debe recontextualizar o reconstruir el conocimiento, apoyado por la “*mediación didáctica*” del profesor [Brousseau, 1986].

La forma tradicional de enseñanza representa varios desafíos, tanto para los profesores como para los alumnos. Si bien el esquema en el que un profesor habla y sus estudiantes asumen el papel pasivo de escuchas puede ser muy efectivo para diseminar temas extensos a un número grande de estudiantes, estas interacciones en un sentido promueven el conocimiento pasivo y superficial [Bransford et al., 2000]. Otro efecto adverso de este esquema pedagógico es que se estimula muy poco en el estudiante la motivación, la confianza y el entusiasmo por el tema objeto de estudio [Weimer, 2008]. Finalmente, las formas pedagógicas tradicionales abren la puerta para que algunos estudiantes completen su formación en pregrado sin haber alcanzado algunas competencias que le serán indispensables para su desempeño profesional [Wright and Boggs, 2002].

Por todas estas razones, se ha evidenciado la necesidad de cambiar el esquema por medio del cual se imparten los conocimientos a los estudian-

tes de pregrado, de manera que se logre un aprendizaje significativo, orientado a la solución de problemas y de pensamiento crítico [Handelsman et al., 2007]. Aparte de lo anterior, se espera que las metodologías pedagógicas mencionadas afecten a la mayor cantidad de personas posible, de modo que los esfuerzos por aumentar la cobertura sean significativos. Como ya se había mencionado antes, estos esfuerzos deben adelantarse en los cursos introductorios o de primer año, que es la época en la que se presentan los índices más altos de deserción estudiantil [Seymour, 2001, NRC, 2007].

A pesar de la enorme variedad de propuestas basadas en pedagogías activas y orientadas a mejorar los aspectos de la enseñanza de pregrado recién descritos, todas ellas coinciden en lo fundamental: son estrategias de aprendizaje centradas en el estudiante que buscan la participación activa del mismo y la construcción de conocimiento significativo. Allen y Tanner definen las pedagogías activas como aquellas en las que se promueve la búsqueda de información nueva, su organización de manera que sea significativa, y la habilidad para explicar dicha información a otras personas [Allen and Tanner, 2005]. En este tipo de formación se enfatiza la interacción con pares (otros estudiantes) e instructores y se plantean unos ciclos de actividad y realimentación donde los estudiantes tienen la oportunidad de aplicar el conocimiento adquirido en el aula de clase. Los resultados de muchos estudios reportados en la literatura, muestran que el uso de pedagogías activas puede contribuir a mejorar la actitud de los estudiantes hacia el objeto de estudio [Prince, 2004, Preszler et al., 2007] y a incrementar el nivel de conocimiento significativo adquirido [Knight and Wood, 2005, Freeman et al., 2007], en comparación con las pedagogías tradicionales.

Existen diversos enfoques propuestos en la literatura que pueden ser clasificados como pedagogías activas. A continuación se describe una taxonomía que sirve para distinguir aquellas metodologías de uso más difundido.

### 2.3.1. Aprendizaje colaborativo

El aprendizaje colaborativo es uno de los ejemplos más importante del grupo de pedagogías activas. Esta metodología se fundamenta en una estructura teórica llamada *Comunidad de Aprendizaje* (traducción libre del inglés: *Inquiry Community*), que le permite a un grupo de personas participar en una reflexión

crítica orientada, para construir significados personales y confirmar el entendimiento mutuo en torno a un tema objeto de estudio [Garrison et al., 2010]. La Figura 2.4 describe el modelo propuesto para la Comunidad de Aprendizaje.

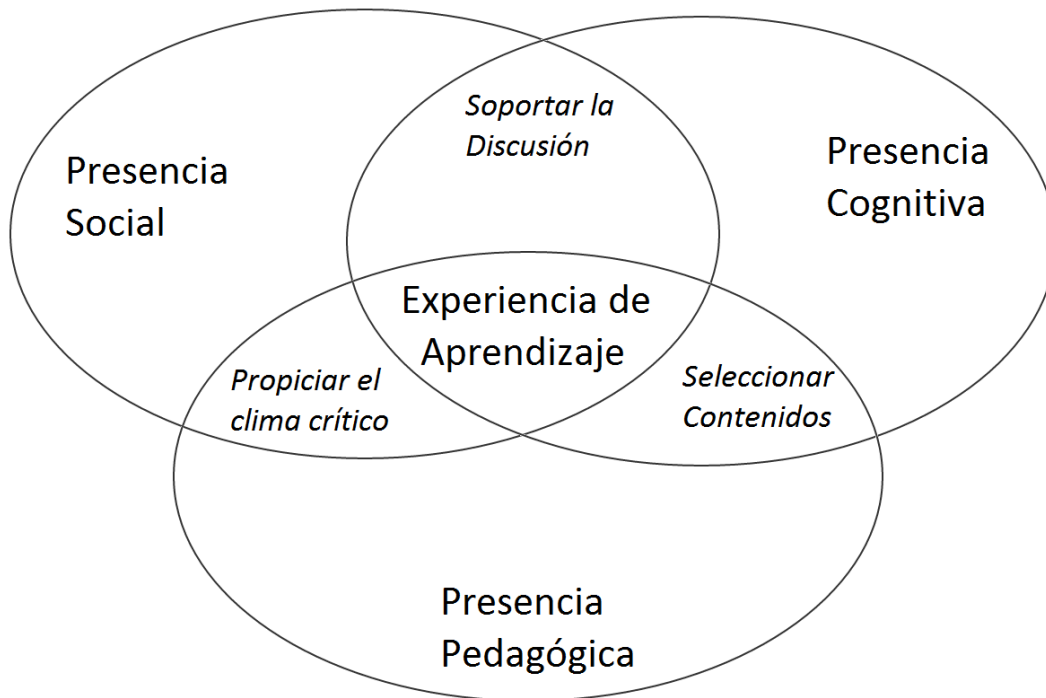


Figura 2.4: *Comunidad de Aprendizaje* [Garrison et al., 2010]

Como puede verse en la figura, la comunidad de aprendizaje se fundamenta en tres presencias:

- **Presencia Social:** Representa la habilidad de los participantes de identificarse dentro de la comunidad y de transmitir sus ideas de manera orientada en un ambiente de confianza.
- **Presencia Pedagógica:** Representa los esfuerzos de diseño, facilitación y orientación en los ámbitos social y cognitivo, con el propósito de lograr resultados de aprendizaje significativo.
- **Presencia Cognitiva:** Representa el conjunto de saberes y construcciones que los participantes de la comunidad están en capacidad de lograr y explicar, a través de la reflexión y la discusión sostenida.

La experiencia de aprendizaje de la comunidad gira en torno a estas tres presencias y está condicionada por su intersección efectiva. Por ejemplo, la selección de los contenidos es fundamental para lograr una iteración adecuada entre la presencia cognitiva y la presencia pedagógica, de modo que los objetivos de aprendizaje significativo, así como los conceptos básicos necesarios para alcanzarlos, estén al alcance de la comunidad. En ese mismo sentido, se debe propiciar el clima crítico dentro de la comunidad, para que todos sus participantes sientan confianza y motivación para participar activamente en la construcción del conocimiento. Finalmente, deben concebirse mecanismos para soportar y orientar la discusión de manera adecuada.

### 2.3.2. Estudios de caso

Los estudios de caso se han usado ampliamente en facultades tales como economía, leyes, medicina y ciencias sociales, pero se pueden usar en cualquier disciplina en la que se pretende que el estudiante explore cómo aquellas cosas que ha aprendido pueden ser usadas en situaciones del mundo real [Dunne et al., 2004]. Muchos estudiantes tienen a ser más inductivos que deductivos en su razonamiento, lo que significa que aprenden mejor a partir de ejemplos que por medio de desarrollos teóricos que parten de principios básicos.

Los casos pueden aparecer en muchos formatos, desde el simple: *¿qué haría Usted en esta situación?*, hasta descripciones detalladas y elaboradas de situaciones, que vienen acompañadas con colecciones de datos para analizar. La selección de los formatos adecuados y de la complejidad de las situación a tratar, dependerá de los objetivos del curso. Muchos de los estudios de caso implican que el estudiante responda una pregunta abierta, o que desarrolle una solución para un problema abierto, con múltiples posible soluciones. Las soluciones varían desde respuestas al estudio de un párrafo de extensión, hasta planes de acción, propuestas o soluciones completamente desarrollados.

Todos los estudios de caso de interés práctico comparten los siguiente elementos:

- Una persona que toma las decisiones y que está enfrentada a una pregunta o problema que debe resolverse.

- Una descripción del contexto del problema, como por ejemplo, aspectos legales, restricciones, cuestiones familiares o de la industria.
- Datos de soporte. Estos datos pueden incluir información tabulada, direcciones web, testimonios o colecciones de citas referenciadas, documentos, imágenes, videos o audio.

Por medio de estudios de caso, los estudiantes se involucran activamente en los conceptos abstractos relacionados con los problemas o preguntas planteadas desde ejemplos reales. Esto desarrolla las siguientes habilidades:

- Resolución de problemas.
- Herramientas analíticas, cualitativas o cuantitativas, dependiendo del caso.
- Toma de decisiones en problemas complejos.
- Lidar con ambigüedades y problemas abiertos.

La presentación de un estudio de caso sirve para establecer un marco de referencia para el análisis del problema. Se le considera útil y necesaria si su exposición proporciona información suficiente a los estudiantes para identificar soluciones y luego aprender a aplicar dichas soluciones en otras situaciones similares. Uno de los enfoques más innovadores en el análisis de los estudios de caso, consiste en hacer que los estudiantes desempeñen roles o actúen como personas involucradas en el caso objeto del estudio. Hacer el papel de una de las partes involucradas en el problema no solo tiene un componente motivador para los estudiantes, sino que los obliga a entender las perspectivas y las diferentes visiones posibles del problema, desde el punto de vista de los involucrados. Estas actividades se pueden complementar con videos o viajes de campo que muestren el contexto en el cual se desarrolla el caso que se está estudiando.

### 2.3.3. Aprendizaje por pares

El aprendizaje por pares es visto por la escuela constructivista como una forma efectiva de que el estudiante logre un entendimiento profundo de ciertos contenidos por medio formales e informales. La interacción entre pares facilita la entrada de los estudiantes a la llamada “*zona de desempeño próximo*”, en la que uno de los pares, que se supone con menos habilidades, es capaz de

incursionar en un área del conocimiento nueva, a través de la resolución de problemas en compañía de un par más experimentado [Vygotsky and Cole, 1978]. Algunos autores consideran [Clark, 2014] que el aprendizaje por pares puede ser muy efectivo y escalable fácilmente, especialmente si se cuenta con herramientas adecuadas basadas en la *web*.

### **Instrucción por pares [Mazur, 1997]**

El profesor de física de la Universidad de Harvard, Eric Mazur, desarrolló la instrucción por pares para asegurarse que los estudiantes pudieran entender y aplicar conceptos clave, en vez de solo memorizar contenidos planos. En palabras del propio profesor Mazur:

*“Me creía un buen profesor hasta que descubrí que mis estudiantes solo respondían de memoria, en vez de aprender y entender el material que se les brindaba. ¿A quien había que culpar en este caso?”.*

A partir del uso sistemático de la instrucción por pares, el profesor Mazur ha logrado incrementar el desempeño académico de sus estudiantes de manera significativa [Crouch and Mazur, 2001]. La instrucción por pares también ha sido aplicada exitosamente en la enseñanza de las humanidades [Restall, 2009] y las matemáticas [Cline et al., 2012].

### **Evaluación por pares**

En el proceso de analizar el trabajo de sus compañeros de clase, los estudiantes adquieren conocimientos profundos y significativos sobre el tema y además desarrollan criterios para la evaluación que pueden ser útiles en su propio trabajo. La autoevaluación y la evaluación por pares pueden llegar a fomentar en los estudiantes el entendimiento de sus propios procesos de aprendizaje, lo que contribuye a desarrollar conocimiento significativo y a un mejor desempeño en situaciones del mundo real. Este tipo de evaluación también tiene un efecto positivo en las habilidades cognitivas del estudiante, que está enfrentado al problema de evaluar objetivamente el trabajo de uno de sus compañeros. Otros efectos positivos de la evaluación por pares son el desarrollo



de una postura crítica y el fomento de situaciones de realimentación positiva en la evaluación.

En algunos casos de aplicación, el aprendizaje por pares es referido como “sistema de votos” [Cline et al., 2012], ya que por medio de dicho sistema, es posible fomentar la interacción de los pares en la construcción del conocimiento. En la Universidad de California (San Diego) se propone un método sencillo para implementar este tipo de actividades:

1. El instructor establece una pregunta que conceptualmente es retadora para los estudiantes. Se ofrecen algunas opciones de solución incluyendo la respuesta correcta.
2. Los estudiantes piensan en la pregunta y hacen una votación sobre cuál cree la mayoría que es la respuesta correcta.
3. El instructor fomenta y orienta una discusión entre los estudiantes sobre la respuesta que escogió la mayoría.
4. Se repite la votación para verificar si las opiniones con respecto al tema han cambiado.
5. El instructor cierra la discusión confirmando la respuesta correcta y brindando herramientas conceptuales complementarias.

#### 2.3.4. Aprendizaje basado en consultas

Esta técnica [Kahn and ORourke, 2005] agrupa enfoques de aprendizaje que están basados en un proceso de búsqueda, estudio e investigación, en el cual los estudiantes:

- Asumen con mayor responsabilidad el proceso de identificar aquellos conocimientos o habilidades que más necesitarán para aprender, así como el proceso de encontrar los recursos (material escrito, *software*, videos, audio, presentaciones) que les permitirán adquirir dichos conocimientos o habilidades.
- Inician un proceso autónomo de recopilación de la información desde los primeros años de estudio y lo van refinando a medida que transcurre su carrera.

- Aprenden a identificar y a responder las preguntas clave que aparecen en su proceso de aprendizaje y a buscar los recursos necesarios para avanzar en dicho proceso.

La Universidad de Manchester ofrece un amplio soporte al tema del aprendizaje basado en consultas, incluyendo recursos bibliográficos, manuales, reportes de caso y bibliografía sobre esta técnica. Para mayor información se puede consultar el sitio *web* de su centro de excelencia en el tema:

<http://www.ceebl.manchester.ac.uk/>

### 2.3.5. Aprendizaje basado en problemas

El Aprendizaje Basado en Problemas (ABP) o PBL (siglas en inglés para *Problem-Based Learning*) es un enfoque pedagógico con el potencial de ayudar a los estudiantes a desarrollar procesos de entendimiento flexibles y habilidades de aprendizaje significativas y duraderas [Hmelo-Silver, 2004]. En ABP se plantean problemas libres y auténticos, para que sean resueltos por los estudiantes. Dichos estudiantes reciben orientación, pero no las respuestas al problema. Dicha orientación es impartida por facilitadores que se encargan también de evaluar el desempeño del estudiante.

La sigla ABP se usa en la literatura indistintamente para referirse a las técnicas de aprendizaje basado en problemas y aprendizaje basado en proyectos. La diferencia entre una y otra estrategia reside en su aplicación: El aprendizaje basado en problemas se centra precisamente en el problema, mientras que en el aprendizaje basado en proyectos, el foco es el producto final. El aprendizaje basado en proyectos se usa de manera muy amplia en la comunidad académica relacionada con las ciencias de la salud, aunque en este gremio también son muy comunes los estudios de caso.

El aprendizaje basado en problemas puede considerarse como un caso especial del aprendizaje basado en consultas. Nuestros procesos de aprendizaje se fundamentan en la búsqueda de respuestas a preguntas de cierta complejidad. Desde muy temprano en nuestra vida, empezamos a cuestionar todo lo que nos rodea. Incluso en aquellas etapas en las cuales no llegamos a entender bien las respuestas que nos brindan, las preguntas en sí mismas nos ayudan a configurar hábitos de pensamiento. Luego, en la edad adulta, creamos conceptos y significados a partir de los esfuerzos en responder ciertas preguntas. Algunos autores

sostienen que en este proceso, las preguntas más retadoras son también las que más aportan a nuestro proceso de aprendizaje [Delisle et al., 1997]. Este es principio básico detrás de ABP: lograr experiencias de aprendizaje a partir del encuentro de los estudiantes con situaciones que conllevan la resolución de un problema.

Frecuentemente, dichos problemas no tienen una única respuesta correcta, por lo que la evaluación en el proceso no puede estar fundamentada exclusivamente en los resultados obtenidos. Los estudiantes aprenden *a través* del proceso que siguen para la resolución del problema planteado: interpretan el problema, recopilan información, postulan posibles soluciones, evalúan las opciones, escogen las mejores alternativas y presentan las conclusiones de su trabajo.

Los orígenes de ABP pueden rastrearse hasta las primeras décadas del siglo XX, cuando el profesor John Dewey sostenía que la labor de los maestros es la de fomentar los instintos naturales de los estudiantes para investigar y para crear. En palabras del propio Dewey: “El primer enfoque con el que se debe enseñar en cualquier escuela, si lo que se busca es despertar el pensamiento, y no adquirir palabras, debe ser tan lejos de la escolástica como sea posible” [Dewey, 1916]. Casi un siglo después, la premisa sigue siendo la misma: los estudiantes aprenden mejor alrededor del proceso de resolución de un problema.

ABP tuvo sus inicios en las escuelas de medicina de Norteamérica, en donde era usado para entrenar a los futuros doctores sobre la mejor forma de resolver problemas médicos. Reconociendo el potencial de la propuesta de Dewey, Howard Barrows desarrolló una colección de métodos para facilitar los procesos instruccionales y de aprendizaje en las escuelas de medicina del Canadá [Barrows, 1986]. Para Barrows, el fin último del proceso de enseñanza es el de “producir doctores capaces de enfrentar problemas de los que habrán de encontrar en su práctica, de una manera competente y humana. Para lograr esto, los doctores deben contar con el conocimiento y con la habilidad para usar dicho conocimiento”. Mientras muchas de las escuelas de medicina tradicionales se concentraban en el conocimiento en sí mismo, Barrows puntualiza que este es solo el primero de tres elementos interdependientes:

- Un acervo de conocimientos esenciales.

- La habilidad de usar dicho conocimiento de manera efectiva en la evaluación y el cuidado de los pacientes.
- La habilidad para extender y mejorar el acervo de conocimiento, de modo que pueda ser usado en problemas futuros.

Con relación con el último de estos elementos, Barrows pudo comprobar por medio del uso de ABP, que los estudiantes se convierten en autodidactas, al desarrollar hábitos de búsqueda de información y síntesis de la información para extender su acervo de conocimientos. El nombre de la estrategia, y la estructura básica operativa de la misma se atribuyen también a Barrows. El proceso de aprendizaje puede ser resumido de la siguiente manera:

1. El problema debe encontrarse primero en la secuencia de aprendizaje, antes de cualquier presentación teórica o estudio.
2. El problema debe ser mostrado al estudiante de la misma manera que lo sería en una situación real.
3. El estudiante trabaja en el problema en una manera acorde con sus habilidades y conocimientos. Debe buscar, razonar y aplicar la información encontrada, y someterla a críticas y evaluaciones.
4. En el proceso se identifican aquellas áreas de conocimiento necesarias para enfrentar el problema, de modo que sirvan como guías de estudio individualizado.
5. Las habilidades y conocimiento adquiridos en dicho estudio se aplican al problema, para evaluar su efectividad en la solución planteada y para reforzar el aprendizaje.
6. El conocimiento adquirido en este trabajo con el problema y como resultado del estudio individual, es estructurado y reportado, de modo que pase a formar parte de las habilidades y saberes del estudiante.

Muchas propuestas pedagógicas modernas y en diversas áreas del conocimiento, están basadas en ABP para lograr un aprendizaje significativo de los estudiantes. Entre las principales razones que favorecen esta tendencia, se pueden encontrar las siguientes:

- En la actualidad y quizás más que en cualquier otro momento, los estudiantes perciben el aprendizaje como aburrido y sin sentido. En ABP los estudiantes son activos y gestores de un aprendizaje propio, con relevancia en el mundo real.
- Después de resolver un problema, los estudiantes retienen mejor lo que han aprendido, en comparación con lo que pasa a menudo con las estrategias de enseñanza tradicional. Debido a esto, aquellos que han aprendido por medio de ABP se sienten con más confianza para enfrentar nuevas situaciones y problemas.
- En esta época, el éxito en el proceso de aprendizaje va más allá de la adquisición de saberes y habilidades básicas. Aparte de lograr un aprendizaje significativo y más profundo, los estudiantes que aprenden con ABP desarrollan habilidades tales como la innovación, la capacidad para transmitir ideas, la resolución de problemas, y la responsabilidad y confianza en sus propias capacidades.
- Las nuevas tecnologías ofrecen herramientas que facilitan el proceso de aprendizaje en ABP. Por ejemplo, por medio de la internet los estudiantes pueden descargar información útil en la resolución del problema, o pueden contactar a sus profesores, o a expertos o pares en el tema de interés.
- ABP puede ser motivante incluso para los profesores, porque compromete a los estudiantes y los convierte en gestores activos del proceso de aprendizaje.

#### **2.3.6. Aprendizaje basado en proyectos**

El aprendizaje basado en proyectos involucra la adquisición de saberes de naturaleza profunda y se enfoca en el desarrollo de proyectos, con retos de la vida real. Esta técnica está fundamentada en la resolución de problemas, toma de decisiones y habilidades de investigación [Moalosi et al., 2012]. Entre las pautas necesarias en el desarrollo de un proceso de aprendizaje basado en proyectos exitoso, se pueden contar:

- Se deben seleccionar muy bien los objetivos.

- Se deben brindar al estudiante herramientas básicas de gestión de proyectos.
- Debe ofrecerse una monitoría y consultoría permanente y efectiva en el proceso de desarrollo del proyecto.
- Debe existir una realimentación adecuada por parte del tutor.

El aprendizaje basado en proyectos inicia con una presentación del producto o resultado final, que requiere la adquisición de conceptos y habilidades específicos, creando un contexto y una motivación para adquirir y desarrollar ciertos saberes y destrezas. Esta estrategia está planteada alrededor de un reto o cuestión de naturaleza abierta, dejando a los estudiantes las decisiones sobre cuáles serán las mejores opciones para desarrollar el proyecto. En ese proceso se crea la necesidad de adquirir información sobre temas particulares que serán relevantes en el desarrollo del proyecto, así como de la recopilación de información y de plantear propuestas innovadoras. Dada la naturaleza abierta del problema, es necesario desarrollar criterios para evaluar las posibles soluciones, manejar un pensamiento crítico y además habilidades de colaboración y comunicación. Una experiencia de aprendizaje basado en proyectos debe ir acompañada de tutorías y monitorías adecuadas, para establecer una realimentación efectiva por parte del tutor, de modo que la naturaleza abierta del problema no sea contraproducente. Hacia el final del proceso, los estudiantes deben presentar el producto o solución que han desarrollado a lo largo de su proyecto. La calidad abierta y aplicada de la técnica basada en proyectos, ha demostrado su utilidad en la enseñanza de las ingenierías, en donde existen propuestas para integrarla al currículo de algunas carreras de pregrado [Hadim and Esche, 2002].

## **2.4. Propuestas específicas en el área de matemáticas**

En la sección 2.2 se mostró que una de las alternativas potenciales para mejorar los indicadores de deserción en los programas de pregrado, es el uso de pedagogías innovadoras, que representen una experiencia motivante y significativa para el estudiante. También se sugirió que, debido a los porcentajes de deserción a lo largo de la carrera, los esfuerzos orientados a prevenir la deserción de los estudiantes pueden tener un impacto más contundente al inicio

del programa de estudios. Lo anterior se debe simplemente al hecho de que las deserciones son más frecuentes en los primeros ciclos de formación de los estudiantes de pregrado.

La sección 2.3 recorre una taxonomía de propuestas conocida como *pedagogías activas*, que están orientadas a favorecer la participación del estudiante en su propio proceso de formación y a lograr experiencias de aprendizaje significativo. Dichas propuestas fueron presentadas en orden de complejidad y de alcance, destacándose el aprendizaje basado en problemas (ABP) y el aprendizaje basado en proyectos, que pueden integrar a todas las demás. En el caso del aprendizaje basado en proyectos, es necesario que el estudiante disponga de herramientas básicas para el manejo y gestión de proyectos de su área de conocimiento (sección 2.3.6), lo cual en principio parece incompatible con estudiantes que apenas inician su ciclo de formación. Por todo lo anterior, esta sección se ocupa de mostrar brevemente algunas de las propuestas pedagógicas que se han reportado en la literatura, involucrando el aprendizaje basado en problemas y haciendo énfasis en el área de matemáticas, que fue identificada en la sección 2.2, como una de las que más genera problemas de aprendizaje en los primeros ciclos de formación de pregrado.

Los defensores del uso de la técnica ABP en el aprendizaje de las matemáticas sostienen que los conceptos teóricos asociados a un currículo se pueden aprender empíricamente a partir de la solución de problemas reales [Kyeong, 2003]. El uso de ABP en la formación en matemáticas favorece el pensamiento crítico de los estudiantes, así como la habilidad de representar de manera abstracta su ideas nuevas y de comunicar dichas ideas a sus pares, en un lenguaje matemático. De acuerdo con Kyeong, la efectividad del uso de ABP en la enseñanza de las matemáticas depende de las características del estudiante, de la cultura de la clase y de las tareas relacionadas con la resolución del problema. En los esquemas tradicionales de enseñanza, los estudiantes son más propensos a asumir el conocimiento en matemáticas como una receta, en donde se imitan los procedimientos sin tener un entendimiento profundo del concepto. Por esta razón, los estudiantes educados de manera tradicional exhiben menores notas en pruebas de matemática estándar y en pruebas basadas en problemas reales, cuando se les compara con estudiantes que han aprendido a través de ABP [Boaler, 1998].

Dianne Erickson hace una propuesta para la enseñanza de las matemáti-

cas usando aprendizaje basado en problemas [Erickson, 1999]. Se muestran sus experiencias con esta propuesta en la enseñanza de las matemáticas en la Universidad de Oregon, mostrando además los puntos fuertes y las dificultades de dicho enfoque a nivel operativo. Erickson llega incluso a sugerir algunos problemas, para enfocar la atención de los estudiantes y lograr ciertos objetivos de aprendizaje en un tema particular. La Figura 2.5 muestra uno de tales problemas. En dicha figura, se les plantea a los estudiantes el problema de calcular el área de la zona sombreada. Se supone que el lado del cuadrado exterior de la Figura 2.5 es igual a 1, y que cada cuadrado se va dividiendo en cuatro partes iguales de manera sucesiva, para sombrear una de esas partes. Intuitivamente, se puede predecir que a pesar que puede haber infinitas áreas a sumar (los cuadrados se pueden seguir subdividiendo indefinidamente), el área sombreada debe tender a un valor finito.

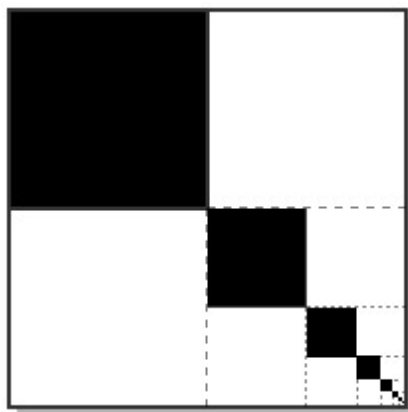


Figura 2.5: *Problema de áreas para el desarrollo de series geométricas*

Una primera aproximación al problema puede ser la de sumar sucesivamente las áreas sombreadas, para inferir cuál puede ser el resultado finito al que converge la suma. Este enfoque se ha usado en la Tabla 2.1. El orden del cuadrado, que aparece en la primera columna de la tabla, se refiere a la cantidad de veces sucesivas que se han hecho subdivisiones en la figura 2.5, con el fin de agregar un área nueva a la suma. Como puede verse en la tabla, a medida que se incrementa el orden del cuadrado, la suma parece converger al valor de  $1/3$ .

La Figura 2.6 representa gráficamente la convergencia para el problema de



Tabla 2.1: *Suma finita de áreas para el problema de la Figura 2.5*

Orden del cuadrado	Lado del Área oscura	Área sombreada	Área acumulada
1	$1/2$	$1/4$	0,2500
2	$1/4$	$1/16$	0,3125
3	$1/8$	$1/64$	0,3281
4	$1/16$	$1/256$	0,3320
5	$1/32$	$1/1024$	0,3330
6	$1/64$	$1/4096$	0,3333
...			

las áreas. La figura muestra el área acumulada como una función del orden del cuadrado sombreado, y nuevamente, dicha área parece converger al valor de  $1/3$ . El planteamiento del problema, tal y como lo propone la profesora Erickson, obliga a calcular el área sombreada de la Figura 2.5 de distintas maneras, tantas como sea posible. Lo anterior quiere decir que la Tabla 2.1 y la Figura 2.6 representan solamente una de las posibles soluciones al problema, y que los estudiantes están obligados a concebir nuevas formas de resolver la convergencia de la suma.

A partir de experiencias con problemas como el de la Figura 2.5, la profesora Erickson demuestra que los estudiantes son capaces de asimilar conceptos matemáticos complejos, desarrollar formas de representación abstracta, acercarse al lenguaje matemático y compartir y defender ideas en un entorno de pares. Entre las conclusiones del trabajo se establece que buena parte de la responsabilidad por el éxito de las experiencias con ABP en matemáticas recae sobre el tutor. El tutor debe tener la suficiencia conceptual y pedagógica para asesorar adecuadamente a los estudiantes en la búsqueda de soluciones al problema, en un ambiente de respeto mutuo. También es responsabilidad del tutor concebir los problemas y plantearlos de manera abierta, de modo que se motive la creatividad y la diversidad de ideas en el grupo de estudiantes. Se concluye a partir de las experiencias con estos problemas en matemáticas, que en comparación con las pedagogías tradicionales, los estudiantes desarrollan mejor sus habilidades para resolver problemas abiertos, como los que pueden encontrarse en su desempeño profesional.

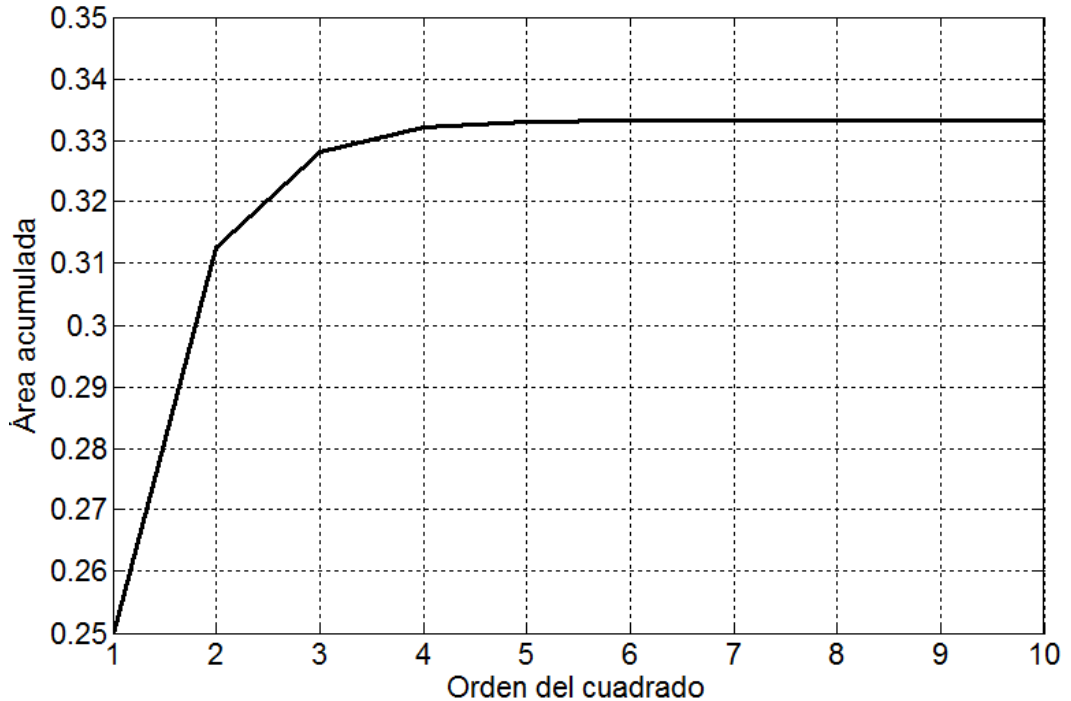


Figura 2.6: Área acumulada en función del orden del cuadrado sombreado, para el problema de la Figura 2.5

Los profesores Delgado y Tenorio de la Universidad del Valle, reportan un caso exitoso del uso de pedagogías activas para el aprendizaje de matemáticas en los primeros semestres de programas académicos de ingeniería [Delgado and Tenorio, 2009]. Las directivas de la Universidad impulsaron el proyecto buscando reducir la deserción estudiantil en dichos programas, particularmente para la población multi-étnica y vulnerable. Luego de tres años de seguimiento a los estudiantes afectados por el proyecto, se ha verificado una permanencia en los programas de ingeniería de un 65 %, lo que supera ostensiblemente las tasas de permanencia de los estudiantes que fueron instruidos por medio de estrategias pedagógicas tradicionales.

El proyecto de los profesores Delgado y Tenorio está fundamentado en una estrategia pedagógica que ellos han denominado *socioconstructivista*, significando que se parte del supuesto que el desempeño de los estudiantes está arrai-

gado en su interacción social y cultural, y que en el desarrollo del proyecto se hace uso de pedagogías activas y elementos constructivistas. La teoría del socioconstructivismo fue acuñada por Lev Vigotsky y supone que el proceso de aprendizaje es, en parte, natural para el ser humano, y que es complementado por herramientas que la persona adquiere desde su entorno social y cultural. En socioconstructivismo resalta la importancia de posicionar los contenidos en situaciones reales (problemas), donde el alumno sienta implicación y compromiso, de modo que los resultados obtenidos le sean útiles para su propia vida. Para la resolución de dichos problemas, el alumno cuenta con sus propios recursos y el apoyo del grupo de tutores, para potenciar las habilidades propias. De esta manera, la solución reportada puede ser clasificada como una estrategia ABP.

En el marco teórico socioconstructivista, hay tres tipos de representación que operan en el desarrollo de la inteligencia humana: Un objeto se puede representar a partir de las *acciones* relacionadas, mediante una *imagen*, o mediante *palabras, íconos o símbolos* [Bruner, 1986]. El proceso de aprendizaje se afianza en la medida en que la persona es capaz de pasar fácilmente de una representación a otra. Esta habilidad debiera promoverse desde la niñez, pero el entorno socio-cultural de la persona puede condicionar el dominio de sistemas simbólicos complejos, restringiendo su proceso de aprendizaje a rutinas basadas en la acción. Aquellas personas que en la escuela media no alcanzan un desarrollo satisfactorio de su pensamiento formal, logran frecuentemente adquirir una inteligencia orientada al pensamiento práctico, recursivo y eficaz para el mundo cotidiano. Cuando estas personas llegan a la Universidad, tienen dificultades para actuar sobre objetos abstractos y sin contextualización, que son propios del discurso académico, y todavía más de las matemáticas.

El reto de la estrategia socioconstructivista, es encontrar una forma de apoyarse en la experiencia individual de los estudiantes y en su inteligencia práctica, para desarrollar su pensamiento formal matemático, que viene a ser un subconjunto de su sistema de representación simbólico. A partir de lo expuesto hasta el momento, se puede decir que la pedagogía ABP es idónea para estos propósitos.

La metodología propuesta por Delgado y Tenorio se fundamenta en la formulación de problemas, que el estudiante enfrenta con la mediación del profesor. El profesor deja de ser el poseedor absoluto del saber, sino que más bien se

convierte un diseñador de situaciones relacionadas con el conocimiento objeto de la enseñanza. Estas situaciones son referidas como *adidácticas* en la teoría socioconstructivista. Por su parte, el estudiante deja de ser el receptor de un conocimiento acabado y pasa a ser el constructor activo de su propio conocimiento, con el objetivo de aprender matemáticas y por medio de actividades específicas de estudio. El libro de texto, que en otras metodologías constituye el centro de gravedad de la enseñanza y el aprendizaje, pasa a ser una voz autorizada que acompaña las actividades de estudio y el proceso de construcción de los saberes. A continuación se resumen algunos aspectos importantes de la metodología propuesta en el proyecto:

- Se pondera mucho el trabajo independiente y adicional a las horas de clase, por parte del estudiante. Dicho trabajo tiene lugar antes de la clase, preparando las situaciones de la guía de estudio proporcionada, y después de la misma, por medio de consultas y asesorías al profesor o a los asistentes de docencia. También se hace uso de tareas, representadas por producción escrita sobre las situaciones planteadas en la guía de estudio.
- En el espacio de las clases, el profesor trabaja con los estudiantes a partir de las preguntas sobre el tema planteado en la guía y procura desarrollar una interactividad para afectar los procesos cognitivos de sus estudiantes. Se busca generar aprendizaje, pero en ningún caso se proporcionan respuestas directas al estudiante que den solución a la situación o problema planteado en la guía.
- Se plantean pruebas cortas semanales sobre el tema desarrollado previamente. Aparte de entregar los resultados de la prueba (notas), los asistentes de docencia se encargan de devolver las pruebas corregidas y comentadas a los estudiantes, y de elaborar un informe para el profesor sobre los aprendizajes deficientes detectados y las lagunas conceptuales y obstáculos exhibidos por los estudiantes.

La metodología descrita fue aplicada a dos cursos de Cálculo I y II, ofrecidos a estudiantes de primeros semestres de ingeniería en la Universidad del Valle. Los cursos piloto fueron impartidos de manera secuencial, durante dos semestres. La idea era monitorear el desempeño y la evolución de los estudiantes durante un año, de modo que se pudiera verificar un cambio substancial en sus hábitos de estudio. Los resultados obtenidos fueron muy prometedores:

1. El porcentaje de alumnos que aprobó el curso pasó de 47,5 % (Cálculo I) al 74,1 % (Cálculo II).
2. Aquellos estudiantes que luego tuvieron que ver el curso de Cálculo III en un esquema de pedagogía tradicional, aprobaron en un 100 %, con un promedio de 4.0 sobre 5.0.
3. Dos estudiantes que participaron en los cursos piloto han obtenido estímulos por buen desempeño académico. Uno de ellos lo ha logrado en tres ocasiones distintas.
4. Todos los estudiantes que aprobaron el curso piloto de Cálculo II, terminaron satisfactoriamente el ciclo de formación en matemáticas.
5. 65 % de los estudiantes que participaron en los cursos piloto de Cálculo I y II, logró permanecer en la Universidad hasta la finalización del ciclo básico de ingenierías.

## 2.5. Conclusiones

En este capítulo se ha hecho una descripción breve de algunas de las causas asociadas al fenómeno de deserción estudiantil en los programas universitarios de pregrado. Una de las conclusiones derivadas de lo dicho hasta el momento, es que el uso de pedagogías activas, puede contribuir a reducir la deserción, ya que dichas pedagogías involucran al estudiante en la construcción del conocimiento y generan experiencias motivadoras y significativas para el mundo real.

Las tasas de deserción cambian a lo largo del tiempo (modelo dinámico de deserción) y se ha identificado que son más altas al principio del ciclo de formación. Aunque se ha visto que las causas de dicha deserción también cambian, dependiendo del tiempo que lleva al estudiante en el programa académico, uno de los factores que más contribuye a la deserción al principio de la carrera, es el bajo rendimiento académico. Por todo lo anterior, se puede inferir que una estrategia que propenda por mejorar el rendimiento académico de los estudiantes, en los inicios de su ciclo de formación, puede tener un alto impacto en las estadísticas de deserción estudiantil.

Las pedagogías activas han sido propuestas como una herramienta para mejorar el desempeño de los estudiantes en diferentes áreas del conocimiento.

Hay diversos reportes de casos exitosos y propuestas para llevar dichas pedagogías a una variedad de programas curriculares distintos. En este capítulo se presentó una taxonomía de dichas pedagogías, destacándose el aprendizaje basado en problemas (ABP) y el aprendizaje basado en proyectos. Estas dos propuestas pueden servir para integrar algunas de las otras técnicas descritas: aprendizaje colaborativo, aprendizaje por pares, aprendizaje basado en consultas, estudios de caso. Sin embargo, en el aprendizaje basado en proyectos es necesario que el estudiante domine algunas habilidades de gestión, cosa que rara vez ocurre en los primeros ciclos de formación. Por todo lo anterior, se ha hecho énfasis en la descripción de la técnica ABP.

Se han presentado algunos casos exitosos en el uso de ABP aplicado a la enseñanza de la matemáticas, para estudiantes de pregrado de primer año. Entre las conclusiones comunes que arrojan dichos trabajos, se puede decir que el tutor o profesor tiene una enorme responsabilidad al formular los problemas, diseñar las actividades dentro y fuera del salón de clases y guiar a los estudiantes en la construcción de saberes significativos. Para todo esto se requiere de la confluencia de una cantidad de recursos, tales como tiempo, monitores y asistentes de docencia, material didáctico, medios virtuales, etc. Sin embargo, el potencial de afectar de manera positiva y significativa el problema de la deserción, puede representar un esfuerzo que vale la pena, en aras de mejorar la cobertura y aprovechar eficientemente los recursos disponibles en las universidades.

## Capítulo 3

# Desarrollo de los temas del curso de matemáticas: Una propuesta de problema

Del capítulo anterior, se concluyó que el aprendizaje basado en problemas (ABP) puede ser una alternativa efectiva para mejorar el desempeño de los estudiantes de primeros semestres, lo que a su vez tiene el potencial de disminuir los índices de deserción estudiantil. En el capítulo 2 también se mostró que la técnica ABP requiere de la formulación de problemas abiertos, en los cuales los estudiantes apropian conocimiento significativo y mejoran sus técnicas de estudio.

Este capítulo se ocupa en primer lugar de revisar el inventario de temas cubiertos en el curso nivelatorio de matemáticas básicas, ofrecido por la Universidad Nacional de Colombia – Sede Medellín. Este inventario servirá como insumo para la formulación de los problemas que se propondrán en la técnica ABP.

Para el primer semestre del año 2011, dichos temas estaban agrupados en seis bloques, como se muestra en la tabla 3.1 [Cardona, 2011]. Los temas específicos de cada bloque fueron ajustados como respuesta a un diagnóstico efectuado con los estudiantes al principio del semestre. Dicho diagnóstico consistió en un cuestionario de problemas cerrados, que pretendían evaluar las competencias de los estudiantes del curso en los temas listados en la Tabla 3.1.

Tabla 3.1: *Listado de bloques de tema, para el curso de matemáticas básicas*

Tema	Clases
Geometría Elemental	Clases 1 a 3
Conjuntos y Sistemas Numéricos	Clases 4 y 5
Álgebra Elemental	Clases 6 a 11
Ecuaciones y Desigualdades	Clases 12 a 14
Funciones Reales	Clases 15 a 24
Trigonometría	Clases 25 a 29

En segundo lugar, en este capítulo se propone un posible problema a ser desarrollado por los estudiantes, con el objeto de desarrollar algunos de los temas listados en el inventario presentado. Se hace una descripción y contextualización del problema, que está basado en la necesidad de localizar una fuente de señal (un problema tecnológico), y se muestran cuáles de los temas que aparecen en el contenido del curso de matemáticas básicas, pueden ser cubiertos a partir del desarrollo de dicho problema.

### 3.1. Listado de temas del curso de Matemáticas Básicas

A continuación se presenta de manera detallada el listado de temas específicos del curso de Matemáticas Básicas, ofrecido por la Universidad Nacional de Colombia — Sede Medellín, para el primer periodo del año 2011 [Cardona, 2011]. Para cada tema se incluyen los objetivos, la cantidad de horas dedicadas, y una breve descripción de la metodología usada en cada caso.

#### 3.1.1. Ángulos, triángulos, congruencia y semejanza

Uno de los objetivos en este tema es reconocer, clasificar y construir triángulos a partir de la especificación de sus ángulos. Se busca también identificar y demostrar los criterios para establecer la congruencia la semejanza entre



triángulos, así como aplicar dichos criterios para resolver triángulos.

La metodología consistió en clases magistrales, distribuidas en dos sesiones de dos horas. Durante dichas clases se alentó a los estudiantes a participar con preguntas y aportes y se desarrollaron algunos conceptos con la ayuda del tablero. Finalmente, se publicaron talleres con ejercicios de aplicación, para ser resueltos como trabajo independiente por parte del estudiante.

### 3.1.2. Áreas y Perímetros. Conjuntos

La idea con este tema es preparar al estudiante para calcular áreas y perímetros de figuras planas, así como volúmenes de diversos tipos de sólidos. Un objetivo adicional en este tema es el de apropiar los conocimientos necesarios para diferenciar y denotar conjuntos, así como para aplicar las operaciones típicas entre ellos, usando diagramas de Venn.

Para este tema se dedicaron dos clases magistrales de dos horas cada una. Las clases se abordaron en la forma de talleres prácticos, en los cuales los alumnos se dedican a la resolución de ejercicios cerrados, y el profesor interviene aclarando algunos de los conceptos teóricos relacionados. Es importante mencionar que en este tema se aprovechó el uso de la herramienta de software llamada *geogebra*.

### 3.1.3. Sistemas Numéricos, Exponentes y Radicales

En primer lugar, se pretende que el estudiante sea capaz de diferenciar adecuadamente los diferentes sistemas numéricos, reconocer sus propiedades, y aplicar adecuadamente las operaciones entre elementos de cada sistema particular. De manera complementaria, se espera que los estudiantes estén en capacidad de resolver operaciones sencillas con exponentes y radicales, así como de simplificar algunas expresiones en donde aparecen dichos operadores.

En este caso, se hace uso de clases magistrales para explicar los conceptos teóricos asociados a los diferentes sistemas numéricos y a las operaciones de exponenciación y radicales. Dichas clases magistrales estuvieron distribuidas

en dos sesiones de dos horas cada una. Las clases se complementaron con talleres de ejercicios, que cada estudiante debía resolver en tiempo adicional al de las clases.

#### **3.1.4. Álgebra básica**

A este tema se dedicaron dos sesiones presenciales, de dos horas cada una. Estas sesiones estaban orientadas a la participación activa de los estudiantes, para lo cual se publicaron algunos talleres, e inclusive videos explicativos. El listado de conceptos asociados a este tema se muestra a continuación:

1. Expresiones algebraicas. Tipos de expresiones. Polinomios y operaciones entre polinomios.
2. División entre polinomios: División larga y división sintética.
3. Ceros reales de polinomios. Teorema de los ceros racionales.
4. Transformación de fracciones impropias en fracciones propias.
5. Teoremas del residuo y del factor.
6. Factorización de polinomios.

#### **3.1.5. Productos notables, Factoriales y Teorema del Binomio**

El objetivo de este tema es la aplicación de productos notables a la factorización, así como entender el operador factorial y el teorema del binomio. Como objetivos complementarios, se espera que el estudiante esté en capacidad de hallar los coeficientes del binomio del triángulo de Pascal, el coeficiente del binomio y el teorema del binomio.

En este caso, se reservaron dos sesiones presenciales de dos horas cada una. Cada una de dichas sesiones inició con una ronda de preguntas para motivar la participación de estudiantes y motivar la proposición de soluciones por parte de los estudiantes.

### 3.1.6. Expresiones racionales

En este caso se abordaron temas como la simplificación, multiplicación y división, adición y sustracción de fracciones; Fracciones compuestas, racionalización; Ecuaciones lineales, ecuaciones cuadráticas y otros tipos de ecuaciones. Entre los objetivos de este tema, se espera que los estudiantes estén en capacidad de:

- Simplificar fracciones usando productos notables y factorización.
- Resolver fracciones complejas y compuestas usando operaciones básicas.
- Racionalizar fracciones.
- Resolver ecuaciones lineales, cuadráticas, y otros tipos de ecuaciones á ecuaciones irracionales, ecuaciones de orden  $N$ ).

Nuevamente, a este tema se dedicaron dos sesiones presenciales de dos horas cada una. Cada sesión se inicia con una serie de preguntas y se anima a los estudiantes a proponer soluciones. Así mismo, la sesión se complementa con recursos adicionales (videos, enlaces) y explicaciones en el tablero, que pretenden aclarar algunos de los conceptos abordados en el tema.

### 3.1.7. Inecuaciones

En este caso se desea abordar el estudio general de las desigualdades. Entre los objetivos de este tema, se encuentran:

- Definir los operadores *mayor que* ( $>$ ), *mayor o igual* ( $\geq$ ), *menor que* ( $<$ ) y *menor o igual* ( $\leq$ ).
- Resolver inecuaciones usando el método analítico, de signos y de valor absoluto.

La metodología en este caso es muy parecida a la de temas anteriores, iniciando cada sesión con una ronda de preguntas motivantes y animando a los estudiantes a resolver dichas preguntas. Dada la dificultad que este tema supone para algunos estudiantes, los monitores del curso se dedicaron a ayudar a algunos de ellos. En este caso se aprovecharon dos sesiones presenciales de dos horas.

### 3.1.8. Modelado mediante ecuaciones

Se busca que el estudiante esté en capacidad de apropiarse algunos criterios para modelar problemas con ecuaciones. Igualmente se definen conceptos como el de función, dominio, rango, y se estudian las representaciones gráficas de las funciones. Finalmente, este tema incluye las funciones lineales como objeto de estudio y conceptos como el de pendiente, intercepto, rectas paralelas y rectas perpendiculares.

La metodología para este tema incluyó el uso de enlaces, videos, animaciones y otro material complementario. Nuevamente se dedicaron dos sesiones de dos horas al estudio de los temas relacionados anteriormente, y se buscó la consecución de los siguientes objetivos:

- Que el estudiante haga uso de la solución de ecuaciones lineales y ecuaciones cuadráticas al modelado de fenómenos reales.
- Que el estudiante esté en capacidad de hacer gráficas de funciones y de determinar su dominio y su rango.
- Que el estudiante pueda usar la prueba de la recta vertical para identificar funciones.
- Que el estudiante esté en capacidad de identificar funciones de tipo lineal, así como de usar conceptos como el de pendiente o el de intercepto. Se espera también que el estudiante pueda definir si un par de rectas dadas son paralelas o perpendiculares.

### 3.1.9. Funciones especiales y transformación de funciones

En este caso, se dedicaron tres sesiones presenciales a este tema, siguiendo la metodología descrita en secciones anteriores. El propósito de este tema es abordar el concepto de funciones definidas por tramos, y operaciones de transformación sobre funciones, tales como las traslaciones, desplazamientos, reflexión, alargamiento y compresión. Entre los objetivos definidos para este tema, se puede decir que se espera que los estudiantes estén en capacidad de:

- Reconocer y graficar funciones especiales, tales como las funciones de valor absoluto, y funciones de la forma  $x^n$  y  $x^{\frac{1}{n}}$ .

- Graficar una función, luego de un proceso de transformación, a partir de la gráfica de la función original.
- Efectuar operaciones sobre funciones, tales como: traslación, reflexión, alargamientos y compresión.

### **3.1.10. Funciones pares e impares y operaciones entre funciones**

Este tema refiere el estudio de funciones pares e impares, así como el álgebra entre funciones y algunas operaciones asociadas a estas: suma, diferencia, producto, cociente y composición. Para este tema, se han dedicado dos sesiones presenciales de dos horas cada una y se ha abordado una metodología que implica una sesión magistral al inicio de cada clase, seguida por un trabajo colaborativo que aborda los conceptos listados anteriormente. Entre los objetivos que se quieren abordar en este tema, se pueden mencionar los siguientes:

- Que el estudiante esté en capacidad de identificar funciones pares e impares.
- Desarrollar las habilidades necesarias para verificar las simetrías de un función dada.
- Apropiar las herramientas para operar funciones y determinar el dominio del resultado de dichas operaciones.

### **3.1.11. Funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas. Función inversa**

En este caso, se espera desarrollar las habilidades de los estudiantes para reconocer las funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas, así como efectuar la prueba de la recta horizontal para identificar funciones uno a uno, y verificar las propiedades de las funciones inversas. La metodología propuesta está basada en explicaciones en clase de los conceptos teóricos, así como la publicación de recursos como videos y enlaces para reforzar dichos conceptos. Se proponen también, sesiones de trabajo colaborativo.

### 3.1.12. Funciones exponencial y logarítmica

En este tema la idea es lograr que el estudiante se habitúe al uso de funciones del tipo exponencial y logarítmico, sea capaz de reconocer o de dibujar sus gráficas, y aplicar modelos exponenciales y logarítmicos a problemas de la vida real. Como ejemplos concretos de este tipo de aplicaciones, se pueden mencionar: el crecimiento exponencial de las poblaciones, las escalas logarítmicas como la *Escala de Richter*, el manejo exponencial de concentraciones, carga y descarga de elementos como condensadores y bobinas, etc. Un objetivo adicional en este tema es la apropiación de las propiedades de las funciones exponencial y logarítmica, para la simplificación de expresiones algebraicas.

Como complemento a las sesiones teóricas ilustrando los temas referentes a las funciones exponencial y logarítmica, los alumnos tuvieron a disposición una colección de problemas contextualizados en aplicaciones reales, como los mencionados anteriormente. Aparte de lo anterior, se suministró un conjunto de enlaces a videos, páginas web, animaciones y recursos interactivos relacionados con dichas funciones.

### 3.1.13. Ángulos y Trigonometría

En este caso, se pretende ambientar al estudiante en el estudio básico de los ángulos y las funciones trigonométricas. Se busca además desarrollar el concepto de ángulo de referencia, así como ilustrar las aplicaciones de la trigonometría en ángulos rectángulos y estudiar las leyes del seno y del coseno.

Entre el conjunto de competencias que se espera que el estudiante desarrolle durante el estudio de este tema, se pueden mencionar las siguientes:

- Transformaciones de ángulos entre grados y radianes y viceversa.
- Reconocer y graficar ángulos en posición estándar y ángulos coterminales.
- Reconocer y operar con algunos ángulos de valores de uso común.
- Identificar y aplicar relaciones trigonométricas en el manejo de triángulos rectángulos.

- Hallar áreas de triángulos por medio de sus relaciones trigonométricas.
- Usar apropiadamente las leyes del seno y el coseno.

### 3.2. Problema propuesto: Localización de fuentes de señal

En la sección anterior se hizo un inventario de los temas impartidos en el curso de Matemáticas Básicas de la Universidad Nacional de Colombia – Sede Medellín. Tal como se describió en el capítulo 2, las pedagogías activas constituyen una alternativa atractiva para lograr el aprendizaje significativo de dichos temas y de paso reducir los índices de deserción estudiantil en los primeros ciclos de formación. De entre el conjunto de técnicas de aprendizaje colaborativo descritas, se destaca el aprendizaje basado en problemas o ABP, que se basa en la formulación de problemas que aglutinen los temas que se pretende desarrollar en el curso.

En esta sección se propone un problema de complejidad media que permite el estudio y apropiación de algunos de los conceptos listados en la sección inmediatamente anterior. Dicho problema tiene que ver con una fuente de señal cuya posición es desconocida y de métodos indirectos para inferir dicha posición. Luego de describir el problema de la localización de fuentes, se muestra cuáles de los temas de matemática básica pueden desarrollarse a partir del mismo. Debe ser claro que es muy difícil que un solo problema aglutine la totalidad de los temas referidos en la sección anterior. Por tanto, dentro de la estrategia propuesta queda abierta la cuestión de qué otros problemas pueden usarse a lo largo del semestre en el curso de Matemáticas Básicas, de tal forma que se cubra un buen porcentaje de los temas del mismo.

Aunque las fuentes de señal pueden ser de diversos tipos (audio, ultrasonido, luz visible, infrarojos y radiofrecuencia), por razones de simplicidad la descripción del problema se ha restringido a fuentes electromagnéticas de radiofrecuencia. El problema tiene mucha relevancia en la actualidad, ya que hoy más que nunca estamos expuestos a radiación electromagnética de distintas fuentes y porque además, la localización de las fuentes tiene diversas aplicaciones en seguridad, rescate, geolocalización, telefonía celular, protecciones y otros temas más. Para ilustrar esto, la siguiente sección describe un

problema de localización de fuentes en el contexto de una situación de la vida diaria.

### **3.2.1. Aplicación de la localización de fuentes en un contexto real**

Desde los tiempos en que los primeros humanos recorrían la tierra en sus labores de recolector y cazador, el problema de la localización ha estado presente. Nuestros ancestros se veían abocados al asunto de cómo regresar a su aldea después de una jornada de caza, pesca o recolección. Más adelante, el problema de la localización seguía siendo relevante para los viajeros, que buscaban una forma precisa de ubicarse, de manera que se pudiera llegar a destino sin contratiempos. Hoy en día, con automóviles, barcos, aviones y muchas otras formas de transporte, el problema de la localización en el globo terrestre sigue siendo tan vigente como en los inicios de la humanidad.

Uno de los primeros intentos serios por resolver el problema de la localización fue el de la navegación inercial. Dicha forma de localización se basa en el hecho de que si uno conoce el punto de partida de una trayectoria, su velocidad y su dirección, está en capacidad de predecir su posición en cualquier momento. Entre los inconvenientes asociados al uso de la navegación inercial se encuentran los siguientes:

1. La estimación de la posición inicial con respecto a una referencia genera muchos inconvenientes. En la Europa de la edad media, existían muchas referencias diferentes, lo que daba lugar a confusiones. Había navegantes que usaban como posición de referencia la ciudad de Roma, en tanto otros podían calcular su posición con respecto a referencias como Londres o París.
2. Calcular la velocidad de desplazamiento no es fácil, menos cuando dicha velocidad cambia en el tiempo. Tal es el caso de los barcos en la antigüedad, cuya velocidad estaba sujeta a las condiciones de viento y de corrientes en el mar.
3. Cualquier error ínfimo en la estimación de la dirección de la trayectoria, puede llevar a grandes errores en la estimación de la posición. Esto es particularmente cierto en trayectorias bastante largas.



Por todo lo anterior, los navegantes buscaron formas más precisas de localización, por lo que recurrieron a los objetos celestes para hacer una estimación de la posición propia respecto a la de dichos objetos. En Europa se usó como referencia la Estrella Polar, que en el hemisferio norte aparece casi alineada con la dirección del polo norte terrestre. Esto solucionaba el problema mencionado antes, con respecto a un punto de referencia fijo, ya que se asumía que dicha estrella siempre ocupaba la misma posición en el firmamento (navegantes como Cristobal Colón descubrirían que esto no era del todo cierto).

Este tipo de navegación constituye una versión primitiva de un problema de localización de fuentes: La fuente de señal es la Estrella Polar, y es necesario determinar la posición relativa de dicha fuente con respecto a la posición actual del navegante. Como se supone que dicha estrella está en un lugar fijo en el espacio, es posible estimar la posición relativa del observador en cualquier punto de la tierra con respecto a dicha fuente.

Las navegaciones de la actualidad basadas en GPS (del inglés *Global Positioning System*) usan un sistema similar para determinar la posición propia. Ahora se sabe que ninguna estrella permanece fija en el firmamento y que de hecho todos los cúmulos de estrellas se están alejando entre sí, por lo que el sistema GPS hace uso de satélites como puntos de referencia para estimar la posición del observador en cualquier parte del mundo.

En una localización GPS cualquier observador tendrá línea de vista (es decir, una trayectoria recta sin interferencia) con al menos tres de los satélites del sistema. Si por ejemplo, un usuario que viaja en su vehículo desea estimar su posición exacta en la superficie de la tierra, deberá establecer la localización relativa de cada una de estas tres fuentes de señal con respecto a su posición actual. Una vez hecho esto, el dispositivo GPS hace una triangulación de estas posiciones relativas para estimar la posición propia. Estos sistemas se han complementado con bases de datos de calles, rutas y sitios de interés, por lo que hoy en día se ofrece una experiencia de navegación en tiempo real, con mapas, alarmas e indicaciones de cómo llegar a destino.

### 3.2.2. Localización de fuentes electromagnéticas de radiofrecuencia

En este tiempo, más que en cualquier otro que el hombre haya existido, nos encontramos inmersos en un mundo saturado de campos electromagnéticos, que proceden de diversas fuentes. Además de las fuentes naturales de estos campos, como los producidos por la acumulación de cargas en la atmósfera, la luz visible o el mismo campo magnético de la tierra, existen otras fuentes generadoras que han sido creadas por el hombre.

Las líneas de transmisión y distribución de energía eléctrica, antenas de radiofrecuencia (estaciones de radio, antenas de televisión, estaciones base de telefonía móvil celular, radioaficionados, equipos UHF y VHF), y equipos para diagnosticar la rotura de huesos (rayos x), son algunos ejemplos de fuentes electromagnéticas artificiales.

Debido a la amplia utilización de las ondas electromagnéticas como medio de propagación de señales de telecomunicación, la aplicación de detección de fuentes electromagnéticas de radiofrecuencia se hace necesaria en actividades tan importantes como operaciones aeronáuticas, localización geodésica, telefonía celular, sistemas de localización de personas, animales, vehículos y dispositivos, aplicaciones militares y civiles de supervivencia, además, de sistemas de localización de descargas atmosféricas a través de la detección de la onda del campo electromagnético generado por este evento atmosférico.

Existen varios métodos para la localización de fuentes electromagnéticas de radiofrecuencia. Pero independientemente del método, se pueden identificar los siguientes elementos fundamentales:

- *El evento*: Rara vez las fuentes de señal están emitiendo continuamente, ya que esto representa ineficiencia en el consumo energético e incluso puede interferir con el proceso de localización. En vez de eso, en muchos esquemas de localización la emisión de señal por parte de la fuente ocurre de manera esporádica (como en el caso de los rayos) o periódica (como es el caso de los sistemas GPS). Al momento en el cual una de estas fuentes emite una señal se le conoce como evento. Para efectos de la explicación, a continuación los términos fuente de señal y evento se van a usar indistintamente, aunque queda claro que la diferencia radica en

la forma en la que se emite la información para efectos de localización.

- *Estaciones base*: Se trata de un conjunto de sensores distribuidos a lo largo del espacio de localización y cuya posición es conocida.
- *Estación de procesamiento central*: Es aquella que toma la información proveniente de los sensores y estima la posición de la fuente.
- *Canal de telecomunicaciones*: Es un canal dedicado a la interconexión de las estaciones base y la estación de procesamiento central.

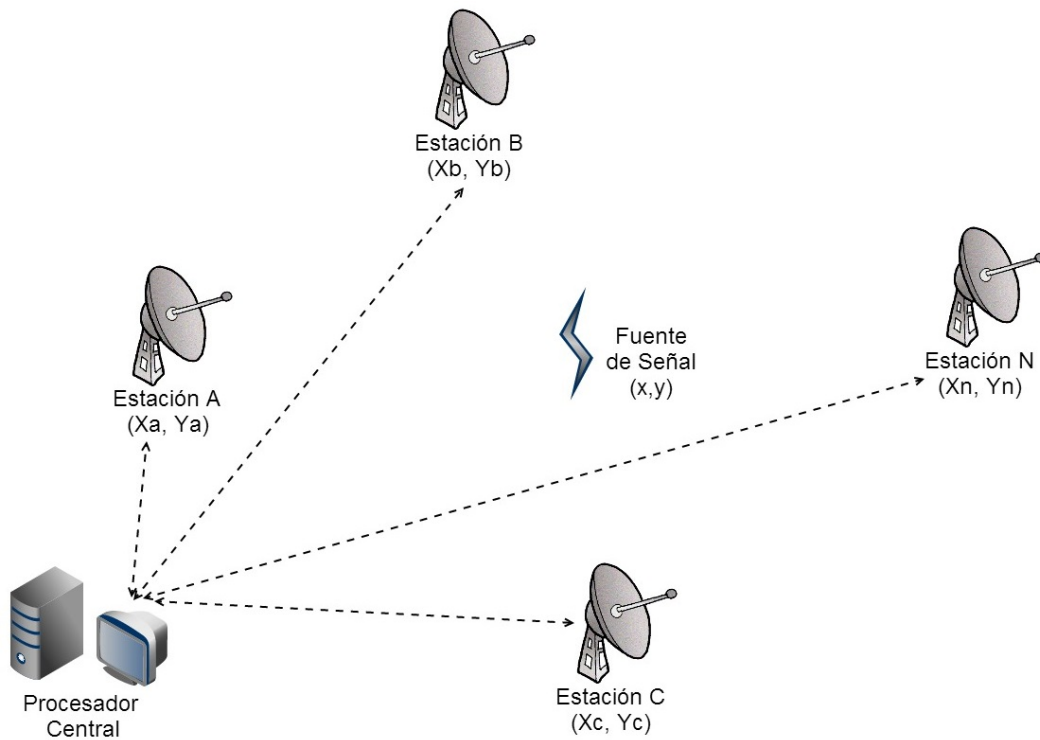


Figura 3.1: *Esquema general de un sistema de localización*

La figura 3.1 ilustra la configuración básica de un sistema de localización de fuentes de señal. La figura muestra un total de  $N$  estaciones base o sensores, etiquetadas como  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , ...,  $N$ . La cantidad de sensores necesarios para lograr una localización libre de ambigüedades dependerá del esquema de

localización utilizado y de la cantidad de coordenadas (dimensiones) a considerar en el espacio. Por ejemplo, en un espacio de dos dimensiones (planar), si se usa un esquema de detección usando ángulos, se requerirá como mínimo de dos sensores para la detección correcta del evento. Para todos los esquemas basados en el tiempo de detección del evento (TOA o TDOA), una configuración de dos dimensiones requerirá como mínimo de tres sensores.

La figura 3.1 también muestra la estación o procesador central, que está encargada de la estimación de la posición, a partir de la información suministrada por cada una de las estaciones base. En la figura, el evento está simbolizado por un rayo, que ocurre en la posición  $(x, y)$  de un sistema de dos dimensiones (planar). Esta posición es precisamente la que se desea estimar con el sistema. Finalmente aparece el canal de comunicaciones, simbolizado con unas líneas punteadas que interconectan a las estaciones base con el procesador central.

De acuerdo con la naturaleza del sensor, los sistemas de detección de fuentes pueden ser pasivos o activos. En los sistemas activos, el sensor o detector debe transmitir una señal que rebotará en el objeto buscado, la cual regresará atenuada al sensor para ser procesada y así estimar la ubicación. Este tipo de método se asocia comúnmente con los sistemas de radar y sonar. De tal forma que el problema de estimación del punto de ubicación del objeto, radica en el tiempo de desfase de las dos señales: la que se emitió inicialmente y la que retornó atenuada.

En las técnicas de detección pasivas se determina la ubicación de una fuente de señal que por si sola emite energía electromagnética. Es decir, que para la ubicación se utiliza la señal proveniente de la fuente. El evento emisor de energía electromagnética puede suceder de forma instantánea como una ráfaga o puede emitir una señal a intervalos regulares o irregulares de tiempo.

Las técnicas pasivas más generalizadas en la detección de fuentes de radiofrecuencia, tienen como parámetros principales la frecuencia, la intensidad y la duración de la señal emitida y se enumeran a continuación:

- **MDF (*Magnetic Direction Finding*)**: Estimación del ángulo de arribo con base en el campo magnético.
- **TOA (*Time Of Arrival*)**: Estimación de la posición de la fuente por

medio del tiempo de llegada de la señal a cada una de las estaciones del sistema.

- **TDOA (*Time Difference Of Arrival*)**: Estimación de la localización de la fuente por medio de las diferencias de tiempo de llegada para cada una de las estaciones del sistema.

### Localización de fuentes por medio del ángulo

En este tipo de sistemas, las estaciones o antenas están en capacidad de detectar en qué dirección se encuentra la fuente de la señal, de modo que combinando la información de varias de estas estaciones, es posible determinar la posición de la fuente sin ambigüedades. Considerando una configuración como la mostrada en la Figura 3.2, donde se supone una ubicación cualquiera para las estaciones  $A$ ,  $B$  y  $C$ , la fuente de señal está localizada en una posición  $(x, y)$  a ser determinada por medio de la información de ángulo suministrada por cada estación.

En la Figura 3.2 pueden observarse las coordenadas cartesianas de ubicación de cada estación base, donde la estación  $A$  tiene coordenadas  $(X_A, Y_A)$ , la estación  $B$  tiene coordenadas  $(X_B, Y_B)$  y la estación  $C$  tiene coordenadas  $(X_C, Y_C)$ . Los ángulos  $\theta_A$ ,  $\theta_B$  y  $\theta_C$  corresponden a las medidas que serán captadas por las estaciones base para ser tratadas por el procesador central, que a su vez arrojará un dato en términos de coordenadas cartesianas  $(x, y)$ , indicando la ubicación de la fuente. Se puede asumir un punto de referencia de las coordenadas cartesianas, es decir, la posición  $(0, 0)$ , y que dicho punto de referencia corresponde a la ubicación de cualquiera de las estaciones base.

Luego de la descripción del sistema y de la contextualización desarrollada anteriormente, el problema de localización de fuentes de señal electromagnética se puede expresar de la siguiente manera: “*A partir de la información de posición de las estaciones sensoras  $[(X_A, Y_A); (X_B, Y_B); (X_C, Y_C)]$ , y de los ángulos obtenidos de cada estación  $(\theta_A, \theta_B$  y  $\theta_C)$ , estimar la posición de la fuente de la señal, es decir, el par coordenado  $(x, y)$* ”.

### Detección de fuentes por medio del tiempo de llegada

Las estaciones sensoras utilizadas para la detección angular descritos en la sección anterior, se basan en la comparación de potencias relativas detectadas para cada una de las componentes del sistema de coordenadas cartesiano  $(x, y)$ .

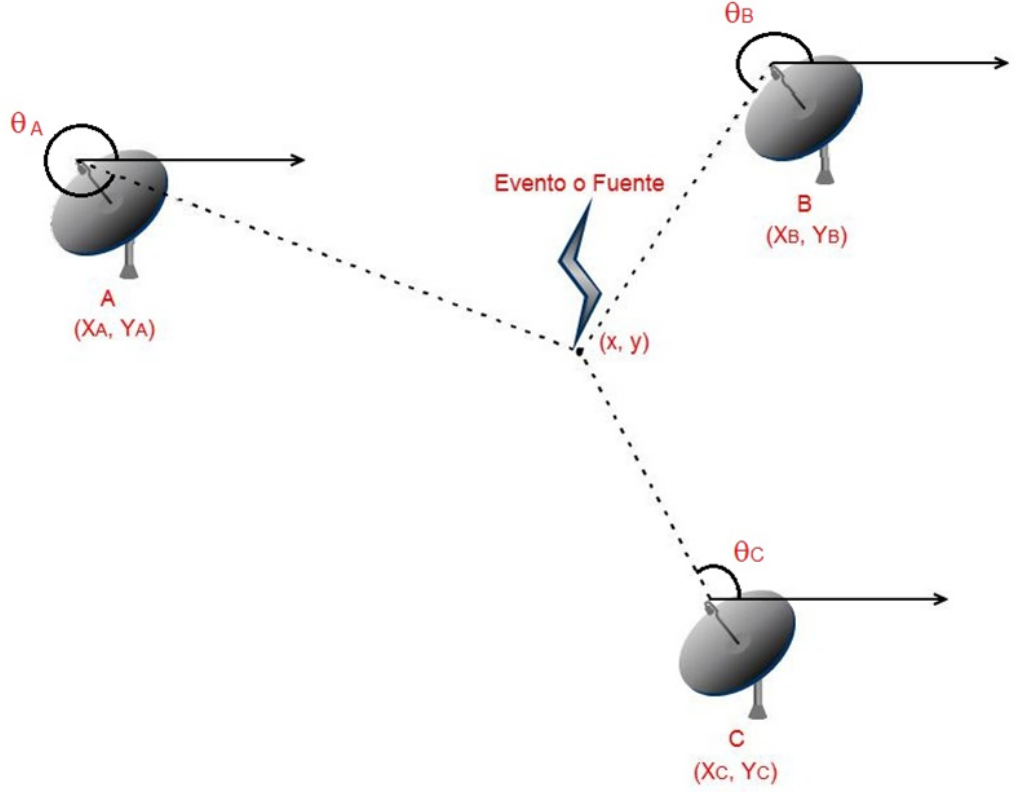


Figura 3.2: Localización a partir del ángulo.

Esto significa que la efectividad de la estimación depende, en buena medida, de la capacidad del sensor para detectar la potencia o la energía irradiada en cada coordenada por la fuente de señal. Por el contrario, los sensores utilizados en esquemas de localización por tiempo de llegada (TOA, del inglés *Time Of Arrival*), son más sencillos que en el caso anterior, ya que solo se requiere que el procesador central cuente con la información del momento en el que ocurre el evento ( $t_0$ ). Lo anterior significa que los sensores usados para hacer la localización TOA, solo deben medir con precisión el momento de aparición del evento y no se requieren de mediciones de potencia o energía relativa. Los parámetros que utiliza esta técnica son:

1. El momento en que la fuente emite la señal ( $t_0$ ).
2. El momento en el que cada estación detecta la señal emitida ( $t_A, t_B, t_C$ ).

3. Las coordenadas en las que están ubicadas cada una de las estaciones sensoras  $[(X_A, Y_A); (X_B, Y_B); (X_C, Y_C)]$ .
4. La velocidad de propagación de la onda en el espacio ( $v$ ).

En la figura 3.3 se muestra la configuración que se emplea en la técnica TOA. Con este método es posible determinar la distancia que hay entre cada sensor y el evento o fuente de señal, que puede ser un descarga atmosférica (rayo) o un dispositivo como un robot que emite una señal en un tiempo ( $t_0$ ) conocido.

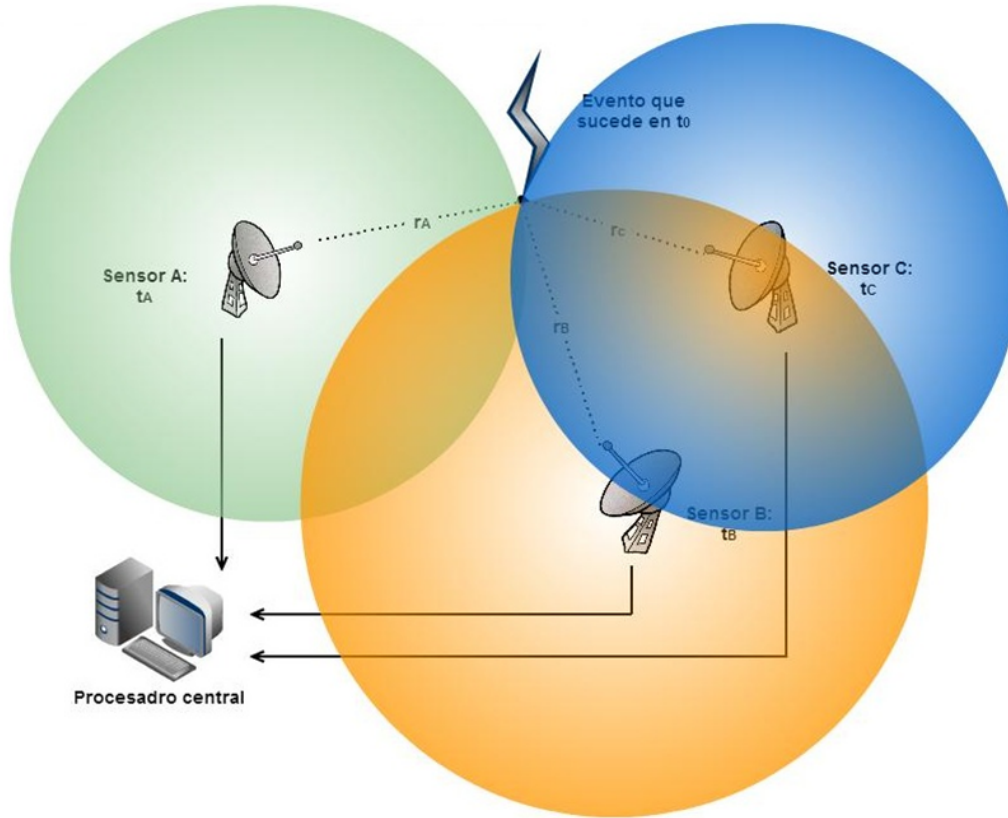


Figura 3.3: Localización por medio de la técnica TOA.

Si la velocidad de propagación de la señal en el espacio ( $v$ ) es constante, la diferencia entre el tiempo de detección de cada estación y el tiempo  $t_0$ ,

configura un círculo (o una esfera para el caso tridimensional) de cierto radio para cada una de las estaciones del sistema. El punto de intersección de los tres círculos corresponderá a la estimación que hace el sistema de la posición de la fuente de señal o del evento. En el caso bidimensional, para obtener la localización de la fuente se requieren como mínimo tres estaciones sensoras que se ubican arbitrariamente. Lo anterior quiere decir que las distancias relativas a cada estación pueden ser diferentes y el tiempo de detección de cada una de ellas también será diferente.

Con los tiempos obtenidos de las estaciones sensoras se puede calcular la distancia de cada una a la fuente de la señal  $(r_A, r_B, r_C)$ . Estas distancias vienen siendo los radios de una circunferencia centrada en la posición de cada una de las estaciones. Esta información de radios implica que el punto de posición buscado (es decir, la posición de la fuente) debe estar en el perímetro marcado por cada una de dichas circunferencias, por lo que su intersección señala de manera unívoca la posición buscada, tal y como se ilustra en la Figura 3.3.

Como ya se ha dicho que se asume que la velocidad de la propagación de la señal en el espacio es constante, los radios de cada circunferencia se pueden determinar a partir de las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} r_A &= (t_A - t_0) \times v \\ r_B &= (t_B - t_0) \times v \\ r_C &= (t_C - t_0) \times v \end{aligned} \tag{3.1}$$

Las ecuaciones mostradas en (3.1) permiten establecer los radios de las circunferencias cuyo centro coincide con cada una de las estaciones sensoras. A partir de esta información, es necesario establecer el punto común de las tres circunferencias con el objeto de determinar la posición  $(x, y)$  de la fuente. Luego de las explicaciones necesarias con respecto a la configuración del sistema y la convención con respecto al nombre de sus parámetros, el problema se puede establecer como: *“Proponer un método para estimar la posición de la fuente de señal o del evento  $(x, y)$ , a partir de las posiciones de cada estación sensora  $[(X_A, Y_A); (X_B, Y_B); (X_C, Y_C)]$ , del momento de emisión de la señal  $(t_0)$ , y de los tiempos de detección de cada una de las estaciones  $(t_A, t_B$  y  $t_C)$ ”*.



### Detección de fuentes por medio del tiempo diferencial de llegada

En el caso de la localización o detección guiada por el tiempo diferencial de llegada o TDOA (del inglés: *Time Difference Of Arrival*), las estaciones sensoras no tienen a disposición la información del momento en el que ocurrió el evento. Lo anterior significa que el conjunto de ecuaciones referidas en (3.1) no podría usarse, ya que no se dispone del valor de  $t_0$ . Lo único que se tiene en el sistema es con los tiempos individuales de detección, proporcionados por cada una de las estaciones sensoras. La técnica TDOA se usa en sistemas de localización de telefonos celulares y en protocolos de navegación tales como el LORAN C, que es usado en navegación civil y militar alrededor del mundo [Jansky et al., 1962].

La resta entre cada par de tiempos de llegada configura un conjunto de ecuaciones cuya resolución de manera simultánea permite estimar la posición del evento. Supóngase que se dispone de tres estaciones sensoras, etiquetadas como  $A$ ,  $B$  y  $C$ . Luego de la ocurrencia del evento, se dispone de los tiempos en que cada una de las estaciones detectó su ocurrencia, es decir,  $t_A$ ,  $t_B$  y  $t_C$ .  $t_A$  Corresponde al momento en que la estación  $A$  detectó el evento, mientras que  $t_B$  y  $t_C$  son los tiempos correspondientes a la detección en las estaciones  $B$  y  $C$ , respectivamente.

Para simplificar el problema, considérese primero solamente a las estaciones  $A$  y  $B$ , tal y como se ilustra en la Figura 3.4. Las posiciones de las dos estaciones son conocidas y corresponden, respectivamente a los pares:  $(X_A, Y_A)$  y  $(X_B, Y_B)$ . La posición del evento o de la fuente de señal se denota por el par  $(x, y)$  y es precisamente lo que se quiere determinar. Las distancias de las estaciones  $A$  y  $B$  al evento se pueden denotar como  $d_A$  y  $d_B$ , respectivamente, y se pueden calcular de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} d_A &= \sqrt{(x - X_A)^2 + (y - Y_A)^2} \\ d_B &= \sqrt{(x - X_B)^2 + (y - Y_B)^2} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Si la velocidad de propagación de la onda es constante en el medio, se puede deducir una expresión para la *diferencia* entre las distancias  $d_A$  y  $d_B$ , que involucre la diferencia en los tiempos de detección:

$$(t_A - t_B) \times v = \sqrt{(x - X_A)^2 + (y - Y_A)^2} - \sqrt{(x - X_B)^2 + (y - Y_B)^2} \quad (3.3)$$

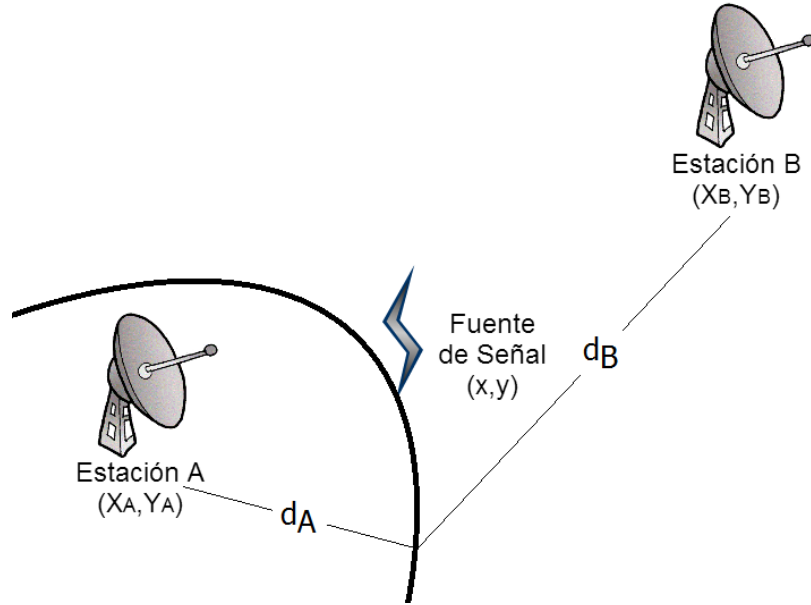


Figura 3.4: *Hipérbola generada por la diferencia de tiempos entre dos estaciones.*

Donde  $v$  en la ecuación 3.3 representa la velocidad de propagación de la señal en el medio. La ecuación 3.3 configura una curva hiperbólica, que satisface todos los posibles pares de puntos  $(x, y)$ , que generarían una diferencia en los tiempos de detección igual a  $t_A - t_B$ . La figura 3.4 ilustra esta situación de manera gráfica.

Para lograr la localización del evento sin ambigüedades, es necesario disponer de al menos tres estaciones en un sistema orientado a la detección de eventos en dos dimensiones. Esto se debe a que las curvas hiperbólicas mostradas en la Figura 3.4 (o equivalentemente, el sistema no lineal de ecuaciones, dado por expresiones como las mostradas en la Ecuación (3.3)) generan dos soluciones potenciales para cada par de curvas. Solo con tres estaciones sensoras es posible la detección unívoca de la posición del evento. En resumen, será necesario resolver de manera simultánea un conjunto de como mínimo tres ecuaciones no lineales, cuya forma es igual a la mostrada en la Ecuación (3.3). Dicho conjunto de ecuaciones se representa, para el caso de tres estaciones sensoras, en la Ecuación (3.4).

$$\begin{aligned}(t_A - t_B) \times v &= \sqrt{(x - X_A)^2 + (y - Y_A)^2} - \sqrt{(x - X_B)^2 + (y - Y_B)^2} \\(t_B - t_C) \times v &= \sqrt{(x - X_B)^2 + (y - Y_B)^2} - \sqrt{(x - X_C)^2 + (y - Y_C)^2} \\(t_C - t_A) \times v &= \sqrt{(x - X_C)^2 + (y - Y_C)^2} - \sqrt{(x - X_A)^2 + (y - Y_A)^2} \quad (3.4)\end{aligned}$$

La Figura 3.5 simboliza el sistema de ecuaciones representado en (3.4) en forma gráfica. En la figura se está representando la situación en la cual, debido a errores en la estimación de los diferenciales de tiempo, o por problemas de sincronización, el sistema no entrega una posición exacta del evento, sino un área probable para la ocurrencia del mismo. Según lo descrito hasta el momento, los paraámetros que se utilizan en la técnica TDOA son:

- Las duplas que representan las posiciones de las estaciones sensoras:  $(X_A, Y_A), (X_B, Y_B), \dots (X_N, Y_N)$ .
- Los momentos de detección de cada una de dichas estaciones:  $t_A, t_B, \dots t_N$ .
- La velocidad de propagación de la señal en el medio ( $v$ ).

### 3.3. Conclusiones

En este capítulo se ha hecho un inventario de los temas y conceptos que hace parte del curso nivelatorio de Matemática Fundamental, para estudiantes de primer semestre de la Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín. Esos temas se pueden organizar alrededor de seis bloques o módulos, a saber:

1. Geometría elemental.
2. Conjuntos y Sistemas numéricos.
3. Álgebra.
4. Ecuaciones y Desigualdades.
5. Funciones reales.

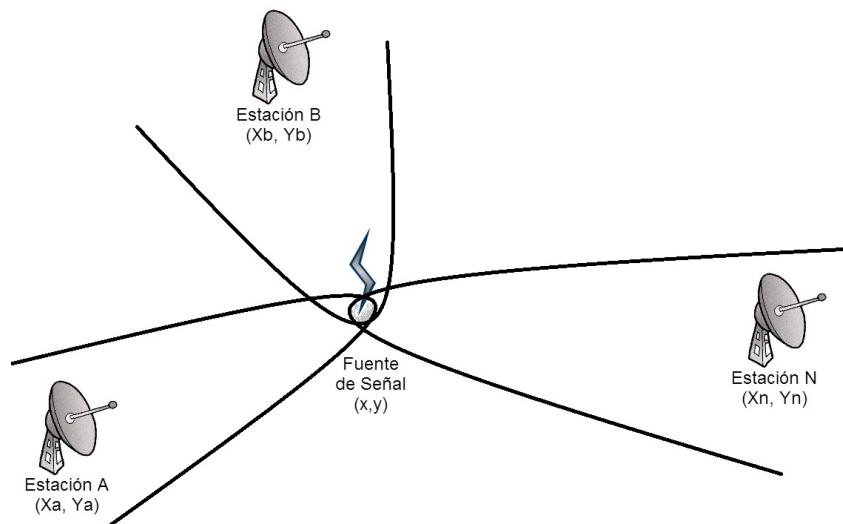


Figura 3.5: *Solución gráfica de un sistema TDOA.*

## 6. Trigonometría.

Se recordará del Capítulo 2, que una de las estrategias propuestas en la literatura, para mejorar los indicadores de deserción, es el uso de pedagogías activas en cursos fundamentales y en una etapa temprana del proceso de formación. De entre la taxonomía de propuestas para pedagogías activas presentadas en dicho capítulo, se optó por el uso de aprendizaje basado en problemas o ABP. Uno de los ejes centrales de esta metodología es la selección de un problema contextualizado y de la vida real que sirva para explicar los conceptos asociados al currículo de la asignatura.

Consecuentemente, en la segunda parte de este capítulo se describe el problema de localización de fuentes como una posible alternativa, para abordar algunos de los conceptos y herramientas referidos anteriormente. Para el problema de la localización, se han mostrado tres formas posibles de solución y se han mostrado los datos necesarios y los detalles de estimación de la posición en cada caso.

## Capítulo 4

# Propuesta de Aprendizaje Basado en Problemas (ABP)

En el capítulo 2 se hizo un recorrido por las posibles causas de deserción estudiantil en los programas académicos de pregrado. Se identificó además que el desarrollo de pedagogías activas en la enseñanza de las asignaturas de primer año, puede ser una estrategia efectiva para disminuir los índices de deserción estudiantil. De entre todas las alternativas en lo referente a las pedagogías activas, se optó por el aprendizaje basado en problemas (ABP), que como indica su nombre, gira en torno a la formulación y resolución de un problema significativo.

El capítulo 3 muestra un inventario de conceptos y contenidos que se imparten en el curso de Matemáticas Fundamentales en la Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín. En el capítulo se propone un problema basado en la localización de fuentes de señal, para abordar varios de los contenidos relacionados con dicho inventario. La idea es desarrollar una serie de actividades que hagan uso del problema de localización, para abordar algunos conceptos relacionados con el curso de Matemáticas Fundamentales.

Este capítulo propone algunas actividades relacionadas con la solución del problema de localización de fuentes de señal, orientadas al desarrollo y apropiación de algunos de los temas listados en el capítulo 3. Fundamentalmente, se propone el desarrollo parcial del curso de Matemáticas Básicas, a partir de una actividad de campo y de varias actividades conexas, que permiten desarrollar algunos de sus conceptos. Se bosqueja también lo que podría ser una

segunda didáctica de campo, que puede ser aprovechada para incursionar en otros conceptos teóricos, o profundizar en algunos de los temas ya cubiertos por las didácticas anteriores.

Es bastante común que las pedagogías ABP se encuentren acompañadas por técnicas de aprendizaje basadas en trabajo colaborativo, pues la envergadura de los problemas que se deben abordar requieren de la interacción de un equipo de trabajo para lograr una solución. Además, este tipo de actividades permite el desarrollo de habilidades y destrezas de trabajo en equipo, tal y como se indicó en el capítulo 2. Por todo lo anterior, se propone a continuación una actividad preliminar que consiste en la conformación de los equipos de trabajo, para abordar el resto de actividades propuestas a lo largo del capítulo.

## 4.1. Actividad preliminar: Conformación de los equipos de trabajo

La primera actividad propuesta está relacionada con el problema de la localización de fuentes, e implica una actividad de campo. Dicha actividad está orientada a la emulación de las condiciones y operaciones necesarias para lograr la localización, con alguno de los métodos descritos hacia el final del capítulo 3.

La conformación de los equipos de trabajo es un elemento indispensable antes del desarrollo de la actividad, ya que se definen roles, el grupo asume una identidad ante los demás estudiantes de la clase y se establecen las condiciones para el desarrollo de didácticas conexas, que tendrán lugar de manera posterior a la actividad de campo.

La actividad de la conformación de equipos, implica los siguientes objetivos:

1. **Definir los integrantes de cada uno de los equipos de trabajo.** Es recomendable que sea el tutor o profesor del curso quien defina las personas que van a conformar cada uno de los grupos. En cuanto a la cantidad, el grupo debe estar conformado por máximo ocho (8) personas.
2. **Información de contacto.** Es necesario que la información de contacto (correo electrónico, teléfono, *Facebook*) sea conocida por todos los

integrantes del grupo y por el tutor. Dado que el curso de Matemáticas Fundamentales es de primer semestre, es razonable pensar que los estudiantes aun no se conocen entre sí, por lo que esta información es indispensables para el desarrollo de las actividades del grupo.

3. **Establecer un nombre para el equipo de trabajo.** Esto es muy importante, porque le da una identidad al equipo con respecto a los demás estudiantes y permitirá identificarlos de manera rápida y efectiva a lo largo de todas las didácticas desarrolladas. Para el tutor, esta identidad de equipo permite evitar una fijación con un único estudiante de los integrantes del grupo.
4. **Identificar los programas académicos de los que procede cada uno de los integrantes del grupo.** Esta información puede ayudar a enriquecer el desarrollo de las actividades, ya que permite al tutor formular preguntas y actividades en función de los campos de aplicación de las carreras involucradas en cada grupo. Es muy deseable que el equipo esté conformado por integrantes de diferentes disciplinas o carreras, ya que esto puede ayudar a enriquecer las actividades relacionadas con la formulación de soluciones al problema propuesto.
5. **Asignar roles a cada uno de los integrantes del equipo.** La didáctica de campo obliga a tener preestablecido un rol para cada uno de los integrantes del grupo de trabajo. De esta manera, dicha didáctica puede desarrollarse de manera dinámica y efectiva. En particular, *para la actividad de campo relacionada con la localización de fuentes de radiofrecuencia, se pueden definir los siguientes roles:*
  - *Coordinador* (1): Se encarga de dirigir las actividades del grupo.
  - *Relator* (1): Toma nota de los resultados de las actividades y de las dificultades encontradas en el desarrollo de la didáctica.
  - *Estaciones* (3): Se trata de tres estudiantes que harán las veces de estaciones sensoras, tal y como se muestra en las figuras 3.1, 3.2, 3.3 y 3.5 del capítulo anterior. Como todas las didácticas propuestas en este capítulo están orientadas al problema de la localización de fuentes en dos dimensiones, se ha establecido la necesidad de tres integrantes del grupo que harán las veces de estaciones. De manera

similar a como se describió en el capítulo 3, las estaciones se diferencian unas de otras por sus nombres: *Estación A*, *Estación B* y *Estación C*.

- *Evento* (1): Se trata de uno de los integrantes que hará las veces de evento, cuya posición arbitraria es precisamente el objetivo de los algoritmos de localización referidos en el capítulo anterior.
- *Auxiliares* (2): La labor de los auxiliares es la de tomar las medidas y colaborar con el desarrollo de las actividades asociadas a la didáctica de campo.

Toda la información referente a la conformación de los equipos, debe ser consignada en un formato como el mostrado en la Figura 4.1. Como una actividad previa al desarrollo de las actividades, el tutor deberá establecer la conformación de cada grupo. Luego, dichos equipos se reúnen para discutir cosas como el nombre que van a usar y los roles de cada integrante. El resultado de dicha actividad es el formato mostrado en la figura, que debe ser compartido con el tutor y todos los integrantes del curso.

## 4.2. Problema: Localización de fuentes por medio de Ángulos

En esta sección se propondrán una actividad de campo y algunas actividades relacionadas con el problema de la estimación de la posición de fuentes por medio de ángulos, tal y como se explica en el capítulo 3. Para cada actividad hay unos objetivos, una lista de actividades a realizar, unos resultados y unas conclusiones.

Se presenta además en cada caso, la lista de conceptos y temas relacionados que aparecen en el programa del curso Matemáticas Básicas, dictado a los estudiantes de primer semestre de la Universidad Nacional de Colombia. Dichos temas aparecen en las notas de clase del curso, que es publicada para los estudiantes como una serie numerada [UNAL, 2010]. Como referencia, se muestra además la ubicación de dichos temas en el texto que podrá ser considerado como libro guía del curso: *Precálculo, Matemáticas para el Cálculo. VI Edición*, de James Stewart, Lothar Redlin y Saleem Watson [Stewart et al., 2007].





**Universidad Nacional de Colombia**  
**Sede Medellín**

**Matemáticas Fundamentales**

**Didáctica de Localización de Fuentes**

**Nombre del grupo:** \_\_\_\_\_

**Integrantes:**

<b>Rol</b>	<b>Nombre</b>	<b>Contacto</b>	<b>Carrera</b>
<i>Coordinador</i>			
<i>Relator</i>			
<i>Estación A</i>			
<i>Estación B</i>			
<i>Estación C</i>			
<i>Evento</i>			
<i>Auxiliar 1</i>			
<i>Auxiliar 2</i>			

Figura 4.1: *Formato para la conformación de los grupos*

#### **4.2.1. Actividad de campo: Localización en el plano cartesiano**

##### **Objetivo General**

El objetivo de esta actividad es familiarizar a los integrantes del equipo con el problema de la localización de eventos, en un entorno en donde se hace la detección de ángulo por parte de las estaciones base o sensoras.

### Objetivos Específicos de Conocimiento

1. Introducir al grupo al concepto de ubicación en un plano cartesiano. Estudiar el concepto de posiciones normalizadas.
2. Familiarizar al estudiante con las ideas de posición de referencia en un plano y con la dirección de referencia, para la medición de ángulos.
3. Efectuar la medición de ángulos en un problema real y entender su utilidad en el problema de localización.

### Objetivos para el desarrollo de destrezas y habilidades

1. Habituar al grupo a la presentación y representación de los resultados de su trabajo, de forma gráfica y/o estructurada.
2. Entender el procedimiento de localización de fuentes por medio de ángulos, posibles fuentes de error, etc.

### Elementos teóricos

A partir del desarrollo de la actividad, se espera que los estudiantes del grupo apropien los siguientes conceptos teóricos:

- **Conceptos básicos:** Punto, recta y segmentos. Ángulos y su clasificación. Ángulos entre rectas. Estos temas están agrupados en la Clase número 1, del material de soporte brindado por la Universidad Nacional de Colombia [UNAL, 2010]. También se pueden encontrar temas asociados a los ángulos y la referencia angular en las páginas 453–546, del texto guía [Stewart et al., 2007].
- **Plano cartesiano:** Ubicación y ubicación normalizada de puntos en el plano ([Stewart et al., 2007], páginas 83–96).
- **Operaciones con números reales:** Propiedades con la suma y el producto de valores reales. Comparación de números, números positivos y negativos ([UNAL, 2010]:Clase número 6; [Stewart et al., 2007]: Páginas 2–44).
- **Expresiones algebraicas:** Ecuaciones con números reales y solución de ecuaciones. Estos temas se presentan en la clases número 8 y 13 del

material del curso ([UNAL, 2010]), y en las páginas 44–73 del texto guía ([Stewart et al., 2007]).

- **Funciones de primer orden:** Modelado por medio de rectas. Intersección entre rectas. Estos temas hacen parte de la Clase número 18 del material de la asignatura ([UNAL, 2010]) y aparecen en las páginas 106–118 del texto guía ([Stewart et al., 2007]).
- **Sistemas de ecuaciones:** Métodos de resolución de sistemas lineales. Este tema hace parte de la Clase número 20 del material del curso ([UNAL, 2010]) y se encuentra igualmente en las páginas 630–645 del libro guía ([Stewart et al., 2007]).

### Procedimiento

En esta actividad los estudiantes trabajarán sobre un terreno plano (por ejemplo: una placa polideportiva) y emularán las condiciones de localización por ángulo en dos dimensiones. Como ya se había mencionado anteriormente, se requiere de la presencia de tres estudiantes representando las estaciones sensoras (*Estación A*, *Estación B* y *Estación C*) y de una persona que haga las veces del evento a localizar.

Entre los materiales indispensables para desarrollar esta actividad de campo, se pueden mencionar los siguientes:

1. Hilos de colores.
2. Flexómetro.
3. Transportador.
4. Hoja milimetrada.
5. Bitácora para el registro de las medidas.
6. Material para cartelera.

La Figura 4.2 bosqueja cómo podrían distribuirse los integrantes del grupo en la actividad de campo. En primer lugar, las dimensiones del terreno aparecen normalizadas, pero no hay ningún problema con tomar las medidas en metros sin ningún tipo de normalización o conversión. Los tres estudiantes que

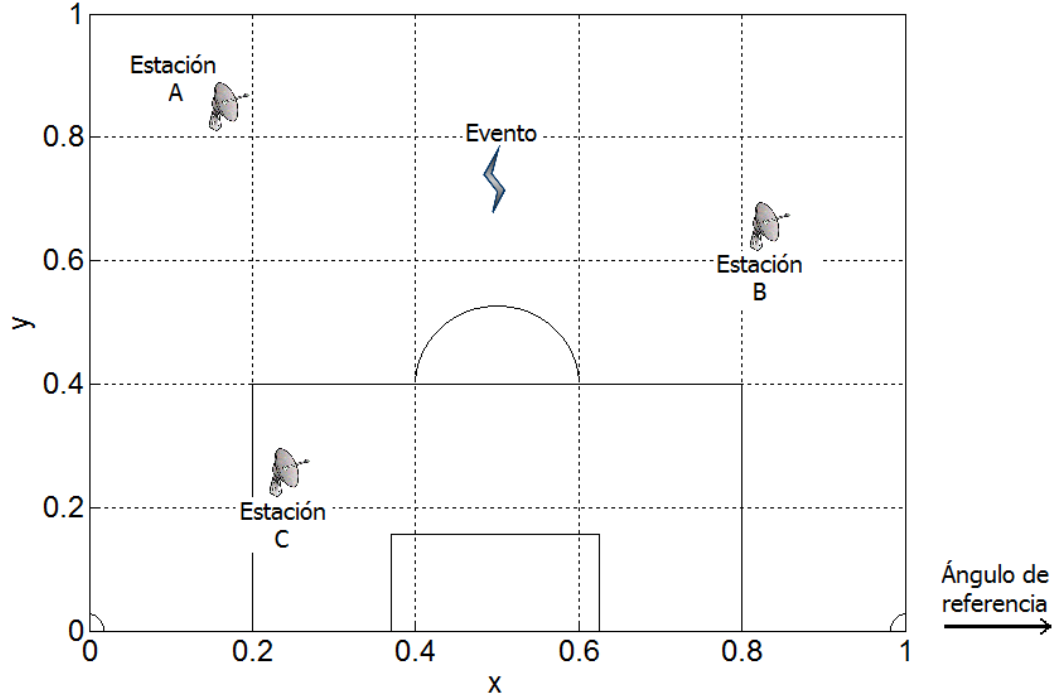


Figura 4.2: Didáctica de campo para el problema de localización de fuentes

hacen las veces de estaciones sensoras ( $A$ ,  $B$  y  $C$ ) asumen posiciones arbitrarias dentro del terreno. Sin embargo, a pesar de ser arbitrarias, sus posiciones relativas dentro del campo (es decir, los pares  $(X_A, Y_A)$ ,  $(X_B, Y_B)$  y  $(X_C, Y_C)$ ) deben ser medidas y anotadas por los estudiantes auxiliares.

De la misma manera, el estudiante que hará las veces de evento, deberá ubicarse en una posición arbitraria dentro del terreno. Los estudiantes auxiliares deberán tomar nota de la posición  $(x, y)$  del evento. Debe establecerse una referencia de ángulo para tomar todas las medidas durante la didáctica. Esta referencia puede escogerse arbitrariamente como la dirección Norte, o cualquier otra que el equipo considere conveniente.

Una vez ubicadas las estaciones sensoras y el evento, y registradas sus posiciones dentro del campo, es necesario medir la ubicación angular de este último con respecto a cada una de las estaciones. Para ello, los auxiliares deberán tensar hilos desde cada estación en dos direcciones. La primera dirección

en la que debe orientarse uno de los hilos, es la referencia angular. La dirección del segundo hilo debe orientarse hacia donde está el evento. De esta manera, se forma en cada estación sensora un ángulo que debe ser medido y registrado. El procedimiento recién descrito se ilustra en la Figura 4.3, para una de las estaciones sensoras.

Al final de la toma de medidas, cada grupo debe contar con la siguiente información:

- Las coordenadas de cada una de las estaciones sensoras:  $(X_A, Y_A)$ ,  $(X_B, Y_B)$ , y  $(X_C, Y_C)$ .
- Las coordenadas de ubicación del evento:  $(x, y)$ .
- Los ángulos medidos desde cada estación hacia el evento:  $\phi_A$ ,  $\phi_B$  y  $\phi_C$ .

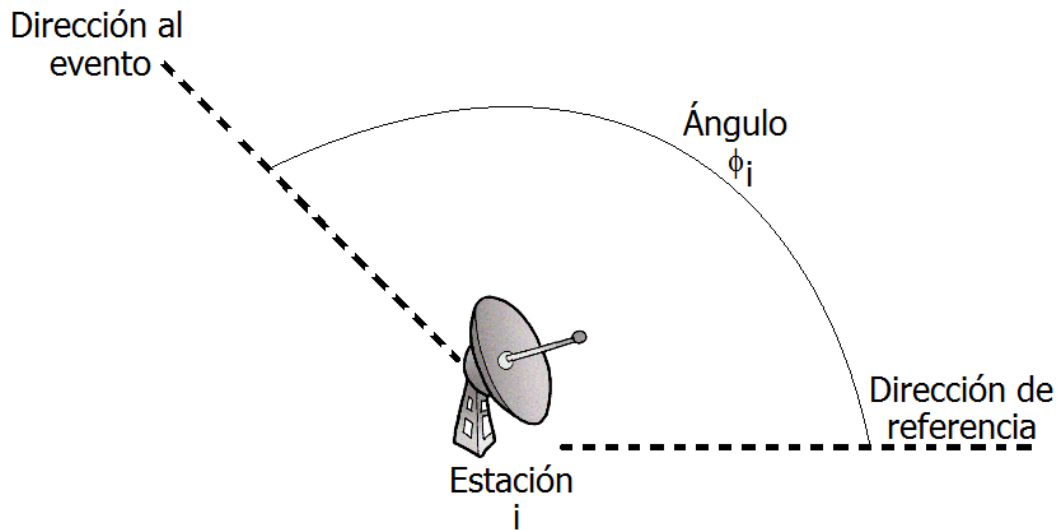


Figura 4.3: *Estimación del ángulo para cada estación*

El equipo deberá presentar los resultados de sus mediciones de dos maneras. En primer lugar, los datos experimentales deben ser consignados en una tabla y entregados al profesor. En segundo lugar, cada equipo debe hacer un cartelera con una imagen similar a la Figura 4.2, con toda la información de las medidas tomadas (posiciones, ángulos), consignada de manera gráfica. La

didáctica de campo finaliza con la exposición de las carteleras en un lugar visible para los demás equipos en el curso.

### **Propuesta de implantación en el aula**

La actividad de campo recién descrita debe estar acompañada de actividades conexas y puede ocupar varias sesiones de clase. Por ejemplo: antes de acudir a hacer las mediciones de campo es necesario presentar el problema y hacer una contextualización respecto a las alternativas de solución (incluyendo la localización por ángulo). Es por eso que en esta sección se hace una propuesta de implantación que incluye cinco sesiones relacionadas con la actividad de campo. La distribución de actividades a lo largo de dichas sesiones se ilustra en la tabla 4.2.

La Tabla 4.2 muestra que la primera sesión de clase corresponde a trabajo preliminar, que como ya se dijo, debe incluir la conformación de los equipos y algún trabajo de contextualización. En esta sesión es importante presentar a los estudiantes algunos de los conceptos clave relacionados con la actividad de campo, de modo que se sepa de antemano qué herramientas formales se tienen a la mano para el análisis y solución del problema.

La segunda sesión corresponde a la actividad de campo en sí, en donde además habrán de tomarse los datos descritos en la sección anterior. Dichos datos serán expuestos (como se dijo anteriormente) al resto de la clase en forma oral y por medio de carteleras. Se puede motivar al grupo a hacer una discusión sobre la forma en que cada equipo tomó, organizó y presentó la información al resto de la clase.

La tabla también muestra que las últimas tres sesiones están dedicadas al estudio de los conceptos referidos en los objetivos específicos de la actividad. Estas sesiones pueden dividirse en dos partes: En primer lugar, cada equipo expone su percepción de los conceptos abordados por cada objetivo. La segunda parte de la sesión es una plenaria en la que el tutor dirige la discusión para aclarar y afianzar cada uno de los conceptos relacionados.

Al finalizar el conjunto de sesiones relacionadas con la actividad de campo referidas en la Tabla 4.2, el equipo deberá presentar y socializar un informe

Tabla 4.1: *Propuesta de Programa Calendario asociado a la actividad de campo*

Sesión	Actividades
1	Conformación de los equipos. Presentación de la situación problema. Presentación de la posible solución (Localización por ángulo). Presentación de algunos de los conceptos clave para abordar el problema.
2	Trabajo de campo en la placa polideportiva. Toma de datos.
3	Socialización de la toma de datos. Avance en las temáticas del primer objetivo específico: Plano cartesiano y posiciones normalizadas.
4	Avance en las temáticas del segundo objetivo específico: Posición de referencia en un esquema de localización. Dirección de referencia. Medición de ángulos.
5	Avance en las temáticas del tercer objetivo específico: Medida de ángulos en situaciones reales. Relación entre la medida de ángulos y la localización del evento.

contestar algunas preguntas formuladas por el tutor del curso. Las preguntas deben estar orientadas a la apropiación por parte de los equipos de los conceptos teóricos que se pretende cubrir con la actividad. Se sugiere que entre otros, el informe incluya los siguientes elementos:

1. *Planteamiento de la solución problema y su posible solución.*
2. *Solución gráfica al problema de localización:* El grupo debe usar la cartelera que elaboró en la sesión de campo para estimar gráficamente la posición del evento, a partir de las posiciones y ángulos medidos para las estaciones sensoras. Deben discutirse las posibles causas del error obtenido. Debe hacerse énfasis en que esta es una solución preliminar al problema y hacerse énfasis en lo inconvenientes de hacer la localización a

partir de gráficos.

3. *Solución analítica al problema de localización:* A partir de las posiciones de las estaciones sensoras, y de los ángulos correspondientes, el grupo deberá obtener la ecuación de una recta que pasa por cada estación y que está orientada hacia la posición del evento. Seguidamente, el grupo deberá resolver el sistema de  $2 \times 2$  ecuaciones para cada par de rectas y estimar la posición del evento. Como es probable que la solución de posición sea distinta para cada par de rectas, el grupo debe hacer una discusión sobre las posibles causas del error y proponer un procedimiento para estimar una única posición a partir de las diversas soluciones obtenidas.
4. *Conclusiones:* Los grupos deberán exponer al resto del curso sus conclusiones sobre el desarrollo de la didáctica y del informe.

Una vez se haya hecho la exposición de las conclusiones por parte de los grupos, el tutor debe fomentar una discusión con respecto a los elementos más relevantes identificados en la práctica y debe orientar dicha discusión, para que se aborden los temas relacionados con los conceptos teóricos que se pretende abordar en la actividad. El tutor debe tomar nota de los aciertos y desaciertos de cada uno de los equipos a lo largo del desarrollo de las sesiones, y si lo considera conveniente, puede sugerir al grupo repetir alguna de ellas, haciendo notar los inconvenientes manifestados en su desarrollo.

#### **4.2.2. Actividad: Triángulos semejantes, áreas y perímetros**

##### **Objetivo General**

El objetivo de esta didáctica es familiarizar a los integrantes del grupo con los conceptos de semejanza entre triángulos, y el área y el perímetro de figuras geométricas cerradas.

##### **Objetivos Específicos de conocimiento**

1. A partir de la experiencia con la didáctica de campo, introducir a los grupos al concepto de semejanza entre triángulos.



2. Asimilar los conceptos de perímetro y área a partir de desarrollos gráficos relacionados con la didáctica de localización por medio de ángulos.
3. Explicar los fenómenos relacionados con el cambio del área y perímetro entre triángulos semejantes.

### Objetivos para el desarrollo de destrezas y habilidades

1. Habituar al grupo a la presentación y representación de los resultados de su trabajo, de forma gráfica y/o estructurada.
2. Asimilar el concepto de semejanza entre triángulos y aprender a identificar dicha semejanza.
3. Aprender a calcular áreas y perímetros de figuras simples.

### Elementos teóricos

Además de muchos de los conceptos asociados con la didáctica de campo, con esta didáctica se pretende abordar los siguiente elementos teóricos:

- **Triángulos:** Clasificación de triángulos. Semejanza entre triángulos. Estos temas se pueden encontrar en las clases número 1 y 2 del material de clase ([UNAL, 2010]) y en las páginas 458–480 del texto guía ([Stewart et al., 2007]).
- **Áreas y perímetros:** Definición de polígono, figura plana, áreas y perímetros de figuras notables. Como referencia, pueden usarse en este caso el material de estudio proporcionado por la Universidad (clases número 3 y 4) [UNAL, 2010], o el texto guía ([Stewart et al., 2007]) en las páginas 458–480 y 689–692.

### Procedimiento

En relación con la didáctica de campo descrita en la sección anterior, se va a suponer una situación inicial similar a la ilustrada en la Figura 4.2: Se cuenta con tres estaciones sensoras (Estaciones  $A$ ,  $B$  y  $C$ ) distribuidas de manera arbitraria en el plano cartesiano. Para cada una de las estaciones se conoce su posición (duplas:  $(X_A, Y_A)$ ,  $(X_B, Y_B)$  y  $(X_C, Y_C)$ ). Se conoce además la posición de un evento, ubicado en la posición  $(x, y)$ . Por razones de simplicidad,

se supondrá que el punto  $(x, y)$  es interno al triángulo formado por las estaciones  $A$ ,  $B$  y  $C$ . Esta situación es ilustrada de forma gráfica en la Figura 4.4.

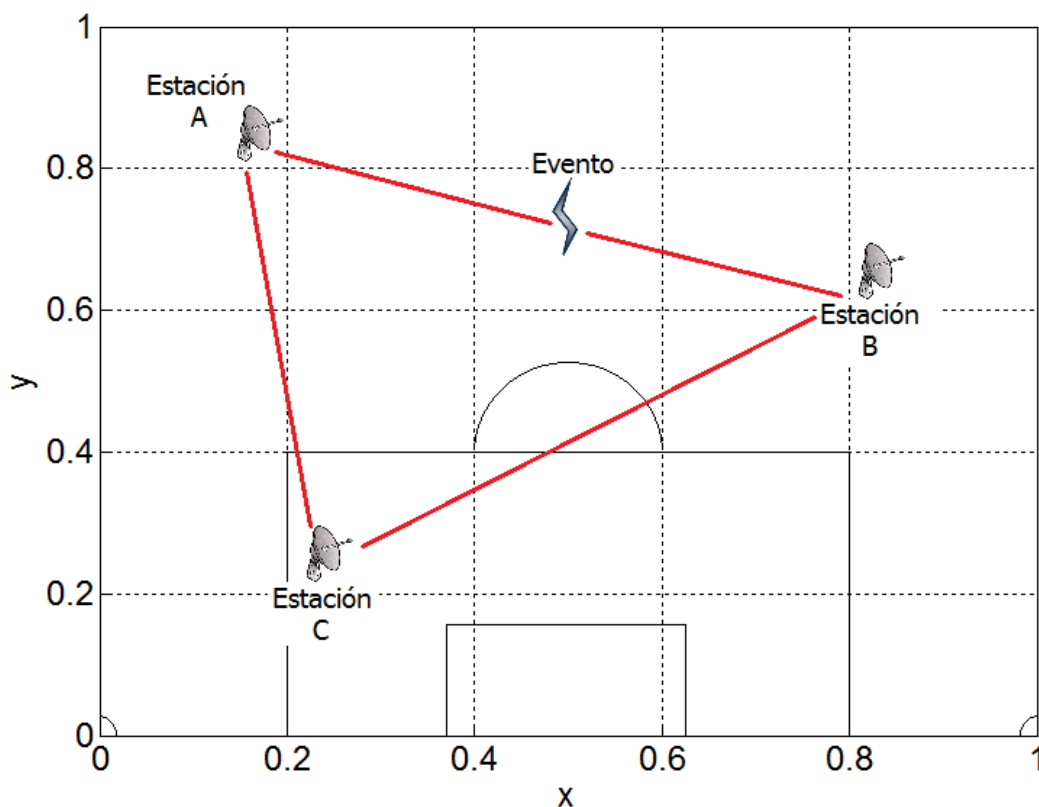


Figura 4.4: Triángulo formado por las tres estaciones sensoras

La primera actividad de esta didáctica implica que los grupos propongan una forma de estimar de manera heurística el perímetro y el área del triángulo formado por las tres estaciones sensoras. Como sugerencia, se puede plantear la opción de usar la representación gráfica de la cartelera, desarrollada en la didáctica anterior, y medir el perímetro de forma aproximada por medio de hilos tensados. Para la estimación del área se podría trabajar rellenando el triángulo de la cartelera con áreas de tamaño conocido.

Los grupos deben calcular igualmente el perímetro y el área del triángulo de manera analítica, para lo cual deben valerse del material teórico referido

anteriormente. Todas las estimaciones de área y perímetro deben quedar consignadas en una tabla, junto con los errores porcentuales con respecto a las estimaciones analíticas, para su entrega y divulgación posterior.

La segunda actividad del procedimiento implica una situación hipotética, en que las distancias entre cada una de las estaciones sensoras y el evento son multiplicadas por una constante  $\alpha$ . Si  $\alpha$  es mayor a la unidad, todas las estaciones se alejarán en igual proporción del evento. Si  $\alpha$  es menor a uno, las estaciones se acercarán en igual porcentaje a la posición del evento. La Figura 4.5 ilustra lo descrito anteriormente para una de las estaciones sensoras.

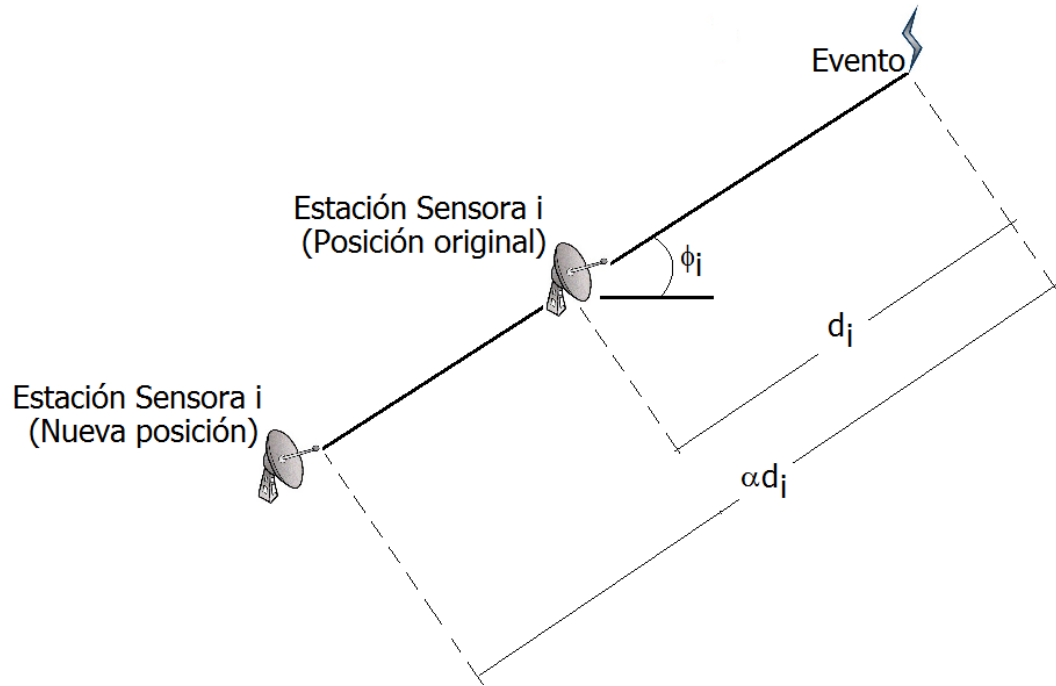


Figura 4.5: Cambio de la distancia entre una estación y el evento, para  $\alpha > 1$

El grupo deberá estimar (puede ser por métodos gráficos) las nuevas posiciones de las tres estaciones. En todo caso, para una estación  $i$  dada, la nueva posición debe satisfacer la siguiente ecuación:

$$\sqrt{(x - X_i)^2 + (y - Y_i)^2} = \alpha \times \sqrt{(x - X_{iN})^2 + (y - Y_{iN})^2} \quad (4.1)$$

Donde, en la Ecuación 4.1 el par  $(x, y)$  representa la posición del evento, el par  $(X_i, Y_i)$  representa la posición original de la  $i$ -ésima estación sensora, y el par  $(X_{iN}, Y_{iN})$  representa la nueva posición de dicha estación.

Una vez recalculadas las posiciones de las tres estaciones sensoras, debe volverse a trazar un triángulo usando sus posiciones como vértices y el grupo debe volver a calcular el área y el perímetro de dicho triángulo por métodos heurísticos y analíticos, tal y como se hizo en la Figura 4.4, para las posiciones originales. El grupo deberá consignar los resultados obtenidos y los errores que se presentaron entre las formas de estimación, para su socialización y discusión posterior.

El tutor debe hacer notar que el triángulo formado por las posiciones iniciales de los sensores y el formado por las nuevas posiciones son *semejantes*. Como última actividad, cada grupo deberá medir los tres ángulos que conforman los triángulos antes y después de la relocalización de las estaciones sensoras.

## Informe

En el informe, cada grupo deberá socializar ante sus compañeros de curso los resultados del procedimiento recién descrito. El tutor debe orientar la discusión posterior entre los estudiantes, de modo que se aborden los siguientes temas:

- Proponer una definición para el concepto de *Semejanza entre triángulos*.
- Establecer cómo se afectan el área y el perímetro de un triángulo cuando el triángulo es redimensionado por un factor  $\alpha$ .
- Proponer formas para calcular el área de figuras geométricas más complejas (polígonos), a partir las coordenadas de sus vértices.

Al final, cada grupo deberá entregar unas conclusiones de la didáctica, en las que se le debe intentar dar respuesta a las cuestiones recién planteadas.

### 4.2.3. Actividad: Funciones trigonométricas

#### Objetivo General

La idea con esta didáctica es ambientar al grupo de trabajo en el uso de las funciones trigonométricas y su aplicación a problemas concretos.

#### Objetivos Específicos

1. Estudiar los efectos de la traslación del eje de coordenadas cartesianas.
2. Hacer uso de las funciones trigonométricas para resolver problemas de localización.
3. Apropiar el uso de las funciones *seno* y *coseno* de un ángulo en el cálculo de proyecciones sobre los ejes coordenados.

#### Elementos teóricos

Se espera que el grupo apropie los siguientes elementos teóricos adicionales, luego de la realización de la didáctica:

- **Fundamentos de trigonometría:** Ángulos, notación y medida estándar de ángulos. Funciones trigonométricas de ángulos. Estos fundamentos pueden encontrarse en el tema de la Clase número 20 del material proporcionado para el curso de Matemáticas Fundamentales ([UNAL, 2010]), y en las páginas 369–377 del texto guía ([Stewart et al., 2007]).
- **Funciones trigonométricas de números reales y aplicaciones en los triángulos:** Estos temas se pueden encontrar en las Clases número 22 y 23 del material del curso ([UNAL, 2010]), y en las páginas 377–399 del texto guía ([Stewart et al., 2007]).

#### Procedimiento

La primera parte de la didáctica consiste en una traslación del sistema de coordenadas, para lo cual se parte de la distribución inicial de estaciones sensoras y el evento en el plano cartesiano, tal y como lo muestra la Figura 4.2. A cada grupo se le informa que ahora el origen de coordenadas del sistema cartesiano debe ser trasladado a la posición del evento, de modo que deben volver a calcular las posiciones de las estaciones sensoras con respecto a la nueva

referencia. Esta situación se explica para una de las estaciones en la Figura 4.6.

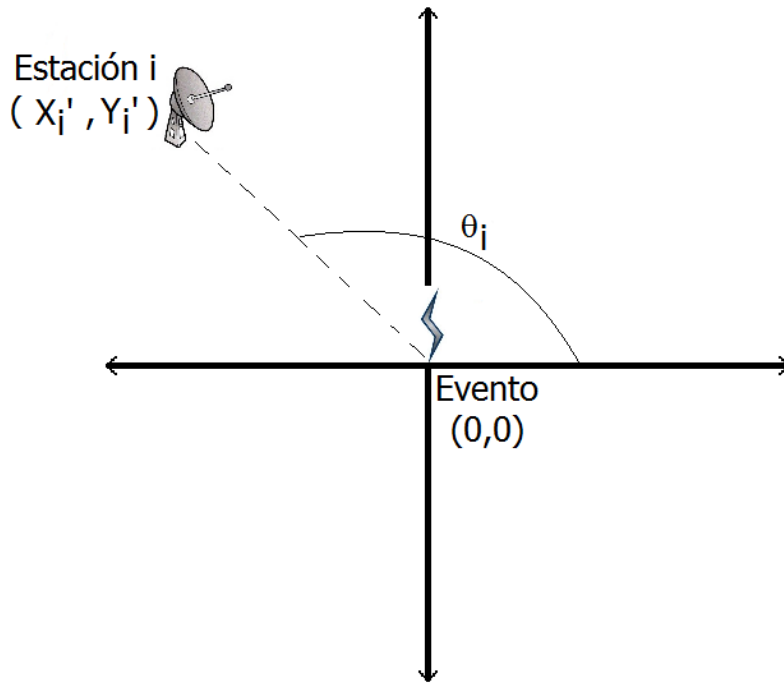


Figura 4.6: *Traslación del origen de coordenadas*

En la Figura 4.6 el origen ha sido trasladado a la posición del evento, por lo que las coordenadas de la posición de cada una de las estaciones sensoras serán completamente nuevas. En la figura, el par  $(X'_i, Y'_i)$  representa las nuevas coordenadas para la  $i$ -ésima estación. La figura muestra también el ángulo medido desde el semieje positivo de abscisas hasta la posición angular de cada estación sensora. Dicho ángulo está marcado como  $\theta_i$ .

La primera actividad de la didáctica consiste en estimar los nuevos valores de posición  $(X'_i, Y'_i)$  y los de los ángulos  $\theta_i$  para cada una de las estaciones sensoras, por métodos gráficos. El grupo debe calcular también dichos valores por métodos analíticos y calcular un error para sus estimaciones. Todos estos resultados deben ser registrados en una tabla para su socialización posterior y la discusión correspondiente.

La segunda actividad plantea un escenario como el de la Figura 4.6, en el que para cada estación  $i$  se dispone solamente de las distancias relativas al origen o al evento ( $d_i$ ), y de los ángulos referidos al eje positivo de abscisas ( $\theta_i$ ). Con esta información, cada grupo deberá estimar las coordenadas de ubicación de cada estación sensora, o equivalentemente, las proyecciones de su localización sobre los ejes coordenados ( $X'_i, Y'_i$ ). Nuevamente, los datos estimados deben ser registrados debidamente para la discusión posterior.

### Informe

Como en las didácticas planteadas anteriormente, el informe debe incluir la solcialización de los métodos y resultados graáficos y analíticos desarrollados en el procedimiento. Luego de dichas exposiciones, el tutor debe guiar una discusión del grupo, orientada a abordar las siguientes preguntas clave:

- ¿Qué relación existe entre las coordenadas originales de las estaciones sensoras ( $X_i, Y_i$ ) y las nuevas coordenadas ( $X'_i, Y'_i$ )?
- ¿Qué relación existe entre los ángulos medidos en la didáctica de campo ( $\phi_i$ ) y los ángulos medidos con el nuevo sistema de coordenadas ( $\theta_i$ )?
- ¿Cuál fue la utilidad de las funciones *seno* y *coseno* en la estimación de las posiciones de cada estación a partir de la distancia  $d_i$  y el ángulo  $\theta_i$ ?
- ¿Qué interpretación gráfica se le puede dar a las funciones *seno* y *coseno*?

El informe finaliza con las conclusiones de cada grupo con las respuestas a las preguntas recién formuladas.

## 4.3. Propuesta de otra actividad de campo: Localización TOA

Como se había mencionado anteriormente, en esta sección se bosqueja una segunda actividad de campo, que puede ser aprovechada para reforzar los conceptos abordados con las actividades propuestas hasta ahora, o para abordar elementos teóricos nuevos. Esta segunda actividad de campo está basada en la localización por tiempo de llegada o TOA, que fue explicada en la sección

### 3.2.1 del capítulo anterior.

La Figura 4.7 muestra gráficamente la actividad de campo propuesta. Las estaciones sensoras y el evento se distribuyen en posiciones arbitrarias del plano. Tanto las posiciones de las estaciones sensoras (pares  $(X_i, Y_i)$ ) como la posición del evento  $(x, y)$ , deben ser medidas y registradas por los auxiliares del grupo.

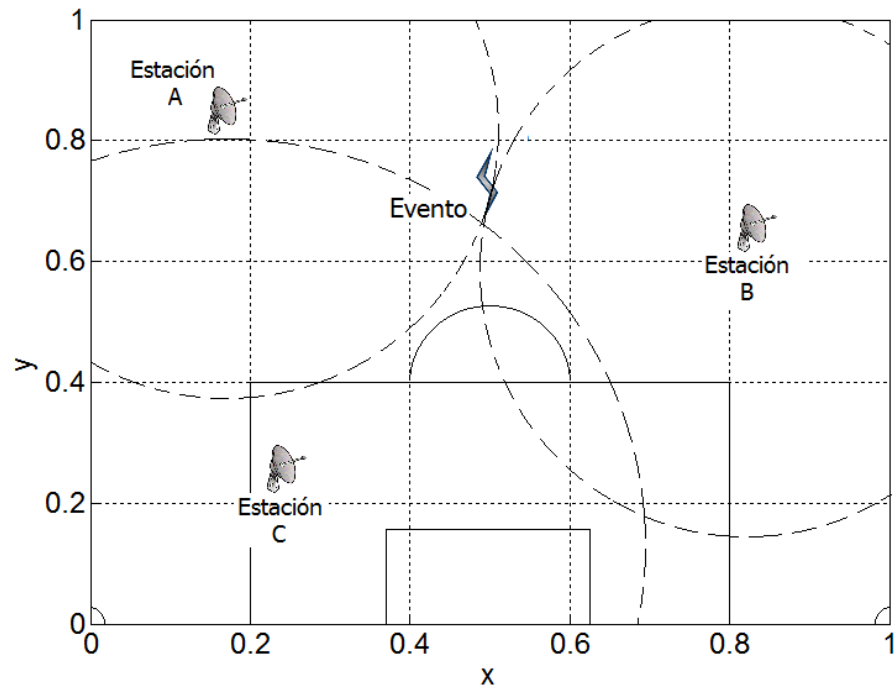


Figura 4.7: Una posible distribución de estaciones y evento para la didáctica TOA

Tal y como se explicó en el capítulo anterior, alrededor de cada estación sensora  $i$  se forma una circunferencia de radio  $r_i$ , que pasa por la posición del evento. Esta situación se representa gráficamente en la Figura 4.7, en donde alrededor de cada estación se forman circunferencias de diferentes radios, y todas ellas pasan por la posición del evento. Dentro del desarrollo de la actividad de campo, se propone que los grupos midan los valores de  $r_i$ , tensando un hilo entre cada estación y el evento. A partir de las posiciones de cada una de las estaciones  $(X_i, Y_i)$  y de los valores de los radios  $r_i$ , los grupos deben estimar



la posición del evento, tal y como se hace en los sistemas TOA.

La Tabla 4.2 resume algunos de los conceptos teóricos que se podrían abordar a partir del desarrollo de la actividad de campo propuesta. En la tabla se incluyen referencias a la ubicación de dichos temas en el material complementario disponible para los estudiantes, es decir, el material de apoyo del curso, y el texto guía.

Tabla 4.2: *Conceptos teóricos involucrados en la didáctica propuesta*

Conceptos	Ubicación en el material [UNAL, 2010]	Ubicación en el texto guía [Stewart et al., 2007]
<i>Conceptos básicos</i>	Clase 1	453–546
<i>Plano cartesiano</i>	- -	83–96
<i>Operaciones entre números reales</i>	Clase 6	2–44
<i>Sistemas de ecuaciones</i>	Clase 20	630–645
<i>Áreas y perímetros</i>	Clases 3 y 4	458–480
<i>Potenciación y Radicación</i>	Clase 7	224–232
<i>Productos y expresiones notables</i>	Clases 10 y 11	- -

Como puede deducirse de la descripción de la actividad de campo propuesta, los roles del equipo no deben cambiarse y corresponden a los mismos definidos para la Figura 4.1. En cuanto a las medidas, el equipo debe concentrarse en este caso en la estimación de las distancias relativas entre cada una de las estaciones y el evento, en vez de estimar los ángulos relativos para cada estación.

La especificación detallada de la actividad de campo TOA y de las didácticas conexas, así como la definición de objetivos, procedimiento y preguntas del informe, tal y como se hizo con la actividad de localización por ángulo de la sección anterior, es considerado como trabajo futuro en el desarrollo del presente proyecto.

## 4.4. Conclusiones

En el presente capítulo se han propuesto una serie de actividades orientadas al desarrollo de una pedagogía ABP y cuyo propósito es el aprendizaje significativo de algunos de los conceptos clave abordados en el curso de Matemáticas Básicas, impartido por la Universidad Nacional de Colombia.

En dicha propuesta, la pedagogía ABP gira en torno a unas actividades de campo, que contextualizan y concretan el problema de localización. De manera anterior al desarrollo de las actividades de campo, es necesario efectuar algunas actividades de contextualización y preparación. Igualmente, luego del trabajo de campo y de la toma de datos, se proponen unas actividades complementarias que están orientadas al desarrollo de los objetivos propuestos para cada actividad.

Si bien todo el desarrollo recién descrito fue hecho para una sola actividad de campo, que corresponde a la emulación de un sistema de localización basado en ángulo, es posible extrapolarlo fácilmente a otras actividades de campo relacionadas o no con el problema de localización de fuentes de señal, descrito en el capítulo 3. Al final del capítulo se ha bosquejado lo que podría ser una segunda actividad de campo basada en localización TOA, alrededor de la cual se pueden afianzar los conceptos abordados con la primera actividad, o abordar conceptos completamente nuevos. El desarrollo de otras actividades de campo como la propuesta al final (con objetivos, implantación en el aula, actividades conexas y demás) es considerado como trabajo futuro en el desarrollo del presente proyecto.

## Capítulo 5

### Conclusiones

La deserción estudiantil es un problema altamente complejo que involucra un conjunto amplio de causas y factores de riesgo. Cada caso de deserción es único e involucra una combinación especial de situaciones personales, académicas, socio—culturales, económicas y psicológicas. Sin embargo, a pesar de su complejidad, es necesario abordarlo y proponer soluciones, ya que el fenómeno de la deserción acarrea unos altos costos personales y para la sociedad en general.

Sería iluso pretender que una propuesta de solución meramente pedagógica o académica, elimine de manera absoluta los casos de deserción en la educación superior. Sin embargo, del estudio de los factores que afectan la deserción, que fue presentado en el Capítulo 2, se pueden concluir dos cosas con respecto a este problema en el ámbito de la educación superior en Colombia.

- En primer lugar, la apropiación y asimilación de conceptos abstractos, como lo pueden ser aquellos impartidos en los cursos de matemáticas, se dificultan más si en las instituciones de educación superior no se hace uso de pedagogías novedosas. Dichas pedagogías deben lograr la motivación del estudiante y la adquisición de saberes significativos, de modo que el desánimo por aprender y la sensación de no estar aprendiendo nada, dejen de ser factores que estimulen la deserción.
- La implantación de estas pedagogías novedosas y motivantes debe ocurrir muy temprano en el ciclo de formación del estudiante. Esto se debe a que los fenómenos de deserción se concentran porcentualmente en los primeros semestres de los programas y a que de esta forma el estudiante

desarrollará hábitos de estudio y aprendizaje que le serán útiles durante el resto de su proceso de formación.

El Capítulo 2 hace también una revisión taxonómica de las llamadas *Pedagogías Activas*, que son propuestas insistentemente en la literatura como alternativa a las pedagogías tradicionales y que buscan lograr los objetivos de aprendizaje significativo y motivante, descritos anteriormente. De toda la plétora de propuestas hechas con respecto a pedagogías activas, el aprendizaje basado en problemas (ABP) y el basado en proyectos, se destacan por ser los más completos e integrar muchos de los elementos presentes en las otras propuestas pedagógicas. Sin embargo, hay dos razones por las cuales el aprendizaje basado en proyectos no es adecuado para cursos al inicio del proceso de formación: Primero, el aprendizaje basado en proyectos apunta como principal objetivo a la culminación exitosa del proyecto, dejando los objetivos de formación en un nivel secundario. Adicionalmente, en este tipo de pedagogía se requiere del uso de técnicas y herramientas para la evaluación y gestión de proyectos, que rara vez dominan los estudiantes al inicio de su ciclo de formación.

Consecuentemente, en el presente proyecto se optó por una propuesta basada en ABP, para su implantación en el curso de Matemáticas Básicas, impartido a los alumnos de primer semestre de la Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín. En la primera parte del Capítulo 3 se hace un inventario de los conceptos clave en dicho curso, con el propósito de formular problemas acordes con dichos conceptos. La segunda parte del capítulo muestra la propuesta de un problema de localización de fuentes, que tiene múltiples aplicaciones en la vida moderna y que puede ser motivante para los estudiantes. Dicho problema puede tener múltiples soluciones, dependiendo de la forma en que se pretende hacer la localización. El capítulo 3 finaliza con una descripción de los tres tipos de solución para la localización reportados en la literatura: angular, por tiempo de llegada (TOA), y por tiempo diferencial de llegada (TDOA). De esta descripción de las técnicas de localización se puede inferir que se trata de un problema pertinente y apropiado para abordar algunos de los conceptos clave en el curso de matemáticas y que aparecen al principio del capítulo.

Sin embargo, concebir un problema significativo y pertinente no es ni de cerca todo lo que se necesita para la implantación de la pedagogía ABP en el aula de clase. Es por eso que en el Capítulo 4 se propone una metodología de

---

implementación, basada en el problema de localización de fuentes y centrada en la localización por medio de estimaciones de ángulo. La propuesta gira en torno a una actividad de campo, que puede ayudar a concretar y contextualizar algunos de los conceptos abstractos que se deben abordar en el curso de Matemáticas Básicas. Alrededor de la actividad de campo se proponen una serie de actividades conexas y un conjunto de sesiones en el aula de clase, tendientes a la asimilación de algunos de los elementos teóricos que se pretende abordar en el curso. También se proponen algunas formas de evaluación que incluyen la socialización de resultados por parte de los equipos de trabajo, sesiones plenarias de discusión y la presentación de informes.

En la propuesta se hace un listado de los temas o conceptos que pueden cubrirse con el desarrollo de la actividad de campo. Adicionalmente, algunos de los conceptos más fundamentales con incluidos dentro de los objetivos específicos de formación de la actividad. Sin embargo, esta sola actividad de campo está lejos de abarcar todos los conceptos asociados al curso de Matemáticas Básicas. Es por eso que al final del capítulo se bosqueja una segunda actividad de campo, que esta vez está relacionada con la localización TOA. Se pretende además que el capítulo sirva como referencia para proponer y desarrollar en el aula otros problemas significativos que ayuden a cubrir el resto de los conceptos del curso.

Se propone entonces como trabajo futuro la concepción de otros problemas significativos, así como la definición de los siguientes elementos dentro de la pedagogía ABP, para cada uno de estos problemas:

1. Actividades preliminares y de contextualización del problema.
2. Actividad de campo.
  - Conceptos fundamentales y elementos teóricos
  - Objetivo General
  - Objetivos Específicos de Conocimiento
  - Objetivos con respecto al desarrollo de destrezas y habilidades
  - Procedimiento
  - Implantación en el aula de clases
  - Cronograma y sesiones en el aula

- Informe
3. Actividades complementarias.
    - Elementos teóricos
    - Objetivos
    - Procedimiento
    - Informe
  4. Formas de evaluación.

# Bibliografía

- [Adedayo, 1999] Adedayo, O. A. (1999). Differential effectiveness by gender of instructional methods on achievement in mathematics at tertiary level. *Educational Studies in Mathematics*, 37:83–91.
- [Allen and Tanner, 2005] Allen, D. and Tanner, K. (2005). Infusing active learning into the large-enrollment biology class: seven strategies, from the simple to complex. *Cell Biol Educ*, 4(4):262–8.
- [Barrows, 1986] Barrows, H. S. (1986). A taxonomy of problem-based learning methods. *Medical Education*, 20(6):481–486.
- [Bean, 1980] Bean, J. (1980). Dropouts and turnover: The synthesis and test of a causal model of student attrition. *Research in Higher Education*, 12(2):155–187.
- [Boaler, 1998] Boaler, J. (1998). Open and closed mathematics: Student experiences and understandings.
- [Bransford et al., 2000] Bransford, J. D., Brown, A. L., and Cocking, R. R. (2000). *How People Learn: Brain, Mind, Experience, and School: Expanded Edition*. Committee on Learning Research and Educational Practice. The National Academies Press.
- [Brousseau, 1986] Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactiques des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2):33–115.
- [Bruner, 1986] Bruner, J. (1986). *Acción, pensamiento y lenguaje*. Alianza psicología. Alianza Editorial.
- [Bruner and Díaz, 2000] Bruner, J. and Díaz, F. (2000). *La Educación, Puerta de la Cultura*. Aprendizaje (Madrid). Visor.

- [Cabrera et al., 1993] Cabrera, A. F., Nora, A., and Castañeda, M. A. (1993). College persistence: structural equations modeling test of an integrated model of student retention. *Journal of Higher Education*, 6(2):123–139.
- [Cardona, 2011] Cardona, J. A. (2011). Informe final de la práctica docente, experiencia en el aula. Master’s thesis, Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín, Medellín, Colombia.
- [Clark, 2014] Clark, D. (2014). 7 compelling arguments for peer learning.
- [Cline et al., 2012] Cline, K., Parker, M., Zullo, H., and Stewart, A. (2012). Addressing common student errors with classroom voting in multivariable calculus. *PRIMUS*, 23(1):60–75.
- [Crouch and Mazur, 2001] Crouch, C. H. and Mazur, E. (2001). Peer instruction: Ten years of experience and results. *Am. J. Phys.*, 69:970–977.
- [Delgado and Tenorio, 2009] Delgado, C. A. and Tenorio, M. C. (2009). Construcción de conocimiento matemático e inclusión. experiencia con indígenas y afrocolombianos en la universidad del valle. *Seminario de Matemática Educativa, Fundamentos de la matemática universitaria*, 1(3):31–61.
- [Delisle et al., 1997] Delisle, R., for Supervision, A., and Development, C. (1997). *How to Use Problem-based Learning in the Classroom*. ASCD.
- [DesJardins et al., 1999] DesJardins, S. L., Ahlburg, D. A., and McCall, B. (1999). An event history model of student departure. *Economics of Education Review*, 18(3):375–390.
- [Dewey, 1916] Dewey, J. (1916). *Democracy and Education: An Introduction to the Philosophy of Education*. Macmillan paperbacks. Macmillan.
- [Dunne et al., 2004] Dunne, D., Brooks, K., for Teaching, S., and in Higher Education, L. (2004). *Teaching with Cases*. Green guide. STLHE.
- [Erickson, 1999] Erickson, D. (1999). A problem-based approach to mathematics instruction. *The Mathematics Teacher*, 92(6):516–521.
- [Freeman et al., 2007] Freeman, S., O’Connor, E., Parks, J. W., Cunningham, M., Hurley, D., Haak, D., Dirks, C., and Wenderoth, M. P. (2007). Prescribed Active Learning Increases Performance in Introductory Biology. *Cbe-life Sciences Education*, 6:132–139.



- [Galtieri and Peón, 1994] Galtieri, M. and Peón, C. (1994). Releyendo a durkheim. estudio preliminar al suicidio. *El suicidio. Estudio de sociología. Centro Editor de América Latina (CEAL), Colección los fundamentos de las ciencias del hombre*.
- [Garrison et al., 2010] Garrison, D. R., Anderson, T., and Archer, W. (2010). The first decade of the community of inquiry framework: A retrospective. *Internet and Higher Education*, 13(1):5–9.
- [Giovagnoli, 2002] Giovagnoli, P. I. (2002). Determinantes de la deserción y graduación universitaria: Una aplicación utilizando modelos de duración. Department of Economics, Working Papers 037, Departamento de Economía, Facultad de Ciencias Económicas, Universidad Nacional de La Plata.
- [Guzmán et al., 2009] Guzmán, C., Durán, D., Franco, J., Castaño, E., Gomez, k., and Vasquez, J. (2009). Deserción estudiantil en la educación superior colombiana. Technical report, Ministerio de Educación Nacional, República de Colombia, Bogotá, Colombia.
- [Hadim and Esche, 2002] Hadim, H. and Esche, S. (2002). Enhancing the engineering curriculum through project-based learning. In *Frontiers in Education, 2002. FIE 2002. 32nd Annual*, volume 2, pages F3F–1–F3F–6 vol.2.
- [Handelsman et al., 2007] Handelsman, J., Miller, S., and Pfund, C. (2007). *Scientific Teaching*. Scientific Teaching Book Series. W. H. Freeman.
- [Hmelo-Silver, 2004] Hmelo-Silver, C. (2004). Problem-based learning: What and how do students learn? *Educational Psychology Review*, 16(3):235–266.
- [Jansky et al., 1962] Jansky, A. R. C., Division, B., and Guard, U. S. C. (1962). *The Loran-C System of Navigation*. prepared for U.S. Coast Guard by Jansky & Bailey [a division of Atlantic Research Corporation].
- [Kahn and ORourke, 2005] Kahn, P. and ORourke, K. (2005). Understanding enquiry-based learning.
- [Knight and Wood, 2005] Knight, J. K. and Wood, W. B. (2005). Teaching more by lecturing less. *Cell biology education*, 4(4):298–310.
- [Kyeong, 2003] Kyeong, H. R. (2003). Problem-based learning in mathematics.

- [Mazur, 1997] Mazur, E. (1997). *Peer Instruction: A User's Manual*. Prentice Hall Series in Educational Innovation. Prentice Hall.
- [Moalosi et al., 2012] Moalosi, R., Molokwane, S., and Mothibedi, G. (2012). Using a design-orientated project to attain graduate attributes. *International Journal on Design and Technology Education*, 17(1):30–43.
- [NRC, 2007] NRC (2007). *Rising Above the Gathering Storm: Energizing and Employing America for a Brighter Economic Future*. The National Academies Press. Committee on Prospering in the Global Economy of the 21st Century: An Agenda for American Science and Technology, National Academy of Sciences, National Academy of Engineering, Institute of Medicine.
- [Parker, 2005] Parker, M. (2005). Placement, retention, and success: a longitudinal study of mathematics and retention. *The Journal of General Education*, 54(1):22–40.
- [Pinto et al., 2007] Pinto, M., Duran, D., Perez-Almonacid, R., Reveron, C. A., and Rodriguez, A. (2007). Cuestión de supervivencia: Graduación, deserción y rezago en la universidad nacional de colombia. Technical report, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia.
- [Porto and Gresia, 2004] Porto, A. and Gresia, L. D. (2004). Rendimiento de estudiantes universitarios y sus determinantes. *Revista de Economía y Estadística*, XLII(1):93–113.
- [Preszler et al., 2007] Preszler, R. W., Dawe, A., Shuster, C. B., and Shuster, M. (2007). Assessment of the effects of student response systems on student learning and attitudes over a broad range of biology courses. *CBE Life Sci Educ*, 6(1):29–41.
- [Prince, 2004] Prince, M. (2004). Does active learning work? a review of the research. *J. Engr. Education*, pages 223–231.
- [Restall, 2009] Restall, G. (2009). Using peer instruction to teach philosophy, logic, and critical thinking. *Teaching Philosophy*, 32(1):1–40.
- [Seymour, 2001] Seymour, E. (2001). Tracking the processes of change in us undergraduate education in science, mathematics, engineering, and technology.

- [Smith and Geller, 2004] Smith, K. S. and Geller, C. (2004). Essential principles of effective mathematics instruction: methods to reach all students. *Preventing School Failure*, 48(4):22–29.
- [Spady, 1970] Spady, W. (1970). Dropouts from higher education: An interdisciplinary review and synthesis. *Interchange*, 1(1):64–85.
- [Stewart et al., 2007] Stewart, J., Redlin, L., and Watson, S. (2007). *Precálculo: Matemáticas para el Cálculo*. International Thomson Editores, S. A. de C. V.
- [Tinto, 1975] Tinto, V. (1975). Dropout from Higher Education: A Theoretical Synthesis of Recent Research. *Review of Educational Research*, 45:89–125.
- [Tinto, 1988] Tinto, V. (1988). Stages of student departure: Reflections on the longitudinal character of student leaving. *The Journal of Higher Education*, 59(4):pp. 438–455.
- [UNAL, 2010] UNAL (2010). Notas de clase de matemáticas básicas. Departamento de Matemáticas. Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín.
- [Vygotsky and Cole, 1978] Vygotsky, L. and Cole, M. (1978). *MIND IN SOCIETY*. Harvard University Press.
- [Weimer, 2008] Weimer, M. (2008). *Learner-Centered Teaching: Five Key Changes to Practice*. Wiley.
- [Wright and Boggs, 2002] Wright, R. and Boggs, J. (2002). Learning cell biology as a team: a project-based approach to upper-division cell biology. *Cell Biol Educ*, 1(4):145–53.